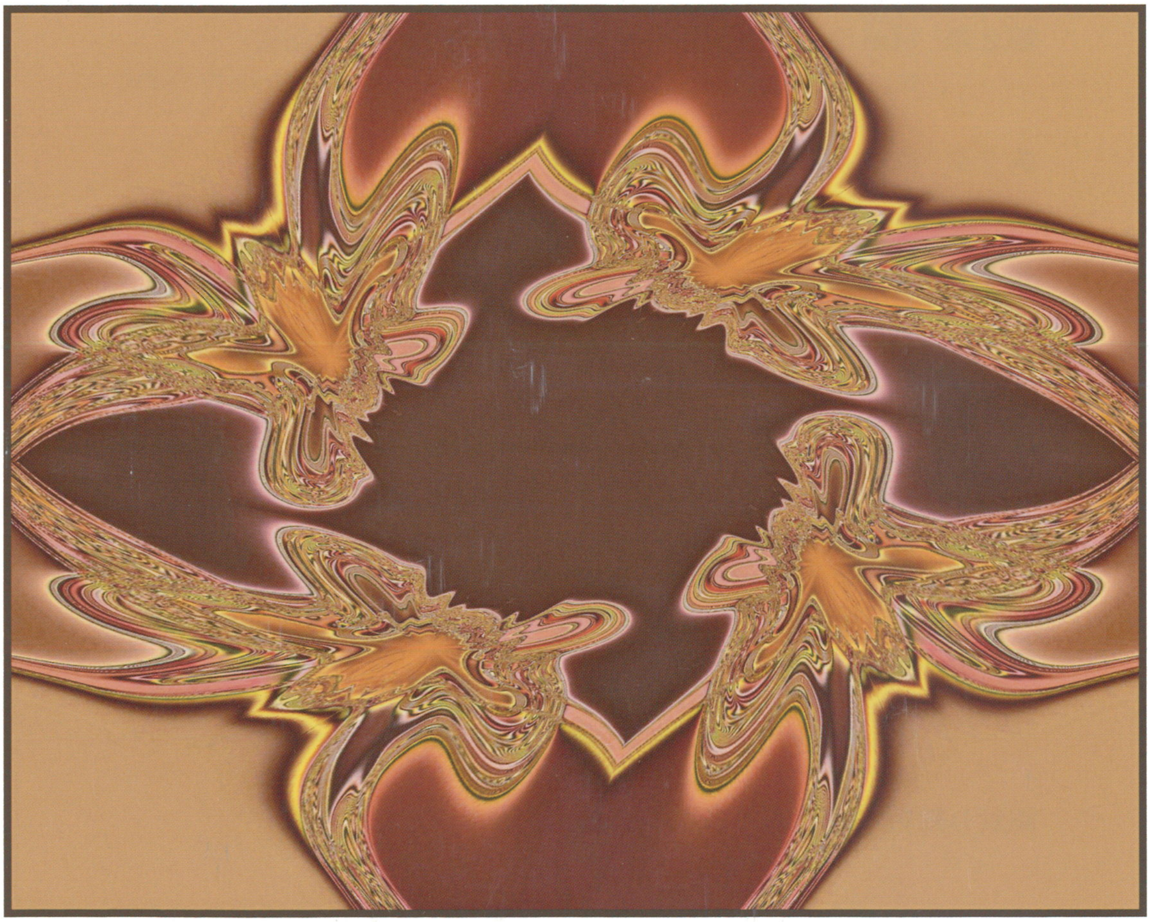
昭和38年７月２日第３種郵便物認可
2013年１月１日発行　第51巻１号　毎月１回１日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

1
2013

特集 表現論の世界
多彩な数理が交叉する世界に迫る



No.595

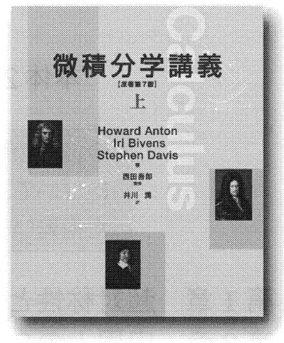
サイエンス社

■解析分野における高大連携数学の決定版

微積分学講義【原著第7版】

上

Anton, Bivens, Davis 著
西田 吾郎 監修　井川　満 訳
◆AB判・400頁・3990円

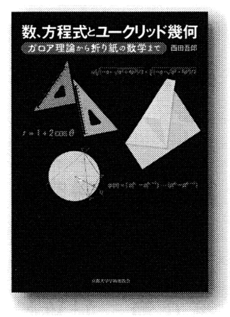


微積分学は、解析学の基礎であり、物理学や工学など様々な分野で不可欠な道具となる。高校数学から大学の数学へスムーズに進めるかどうかは、その後の進路に大きく影響する。具体的な記述で概念や公式の理解を深め、豊富な演習問題で思考力と計算力を鍛える本書は、これから数学を学ぶ者に大きく役立つに違いない。〈全３巻〉

数、方程式とユークリッド幾何

—ガロア理論から折り紙の数学まで

西田 吾郎 著　　◆A5判・239頁・2940円



数と図形—両者の研究は、数学の長い歴史を通して、相互に関連し合いながら発展してきた。現代数学を学ぶ上で重要な、数論・代数学・幾何学などの基礎を相互に関連付けながら、「数の概念」から折り紙による作図問題まで丁寧に解説する。数学を志す学部学生をはじめ、数学を愛好するすべての人を対象とした、新しいテキスト。

既刊書より

線形代数学　西田 吾郎 著　◆A5判・272頁・2625円

確率概論　河野 敬雄 著　◆A5判・206頁・2310円

科学論文の英語用法百科 第１編　［CD-ROM 付］
—よく誤用される単語と表現
グレン・パケット 著／理論物理学刊行会 企画
◆菊判・688頁・5775円

京都大学学術出版会　606-8315 京都市左京区吉田近衛町69 京大吉田南構内〈価格は税込〉
http://www.kyoto-up.or.jp/ TEL 075-761-6182 FAX 075-761-6190

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 595 January 2013

表現論の世界

多彩な数理が交叉する世界に迫る

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間（本誌のみ）11,000 円，半年間（本誌のみ）5,500 円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2009 年/11 省略
2009 年/12《原理》の探求
2010 年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011 年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012 年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ［物理編］
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想［物理編］
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12〈振動する〉物理

数理科学臨時別冊一覧

11 年/11 リーマン予想の数理物理
11 年/12 量子多体系の物理
12 年/1 現象から方程式を創り出す
12 年/3 演習形式で学ぶリー群・リー環
12 年/4 弦理論の代数的基礎
12 年/5 アインシュタイン方程式
12 年/6 CP 対称性の破れ
12 年/7 弦の場の理論
12 年/9 超弦理論の応用
12 年/10 複素多様体論講義
12 年/11 幾何学の量子化
12 年/12 量子力学から超対称性へ

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
丸善多摩センター店
ジュンク堂書店吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂書店（盛岡）
丸善津田沼店
ジュンク堂書店（新潟）
ジュンク堂甲府岡島店
ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都 BAL 店
ジュンク堂書店三宮店
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂書店旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
ジュンク堂書店（秋田）
ジュンク堂書店郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北１店）
九州大学（理系）

January 2013 MATHEMATICAL SCIENCES Number 595

特集／表現論の世界

表現論とのかかわり

大島 利雄

表現論を特集テーマとして取り上げるのは初めてのようです．表現論の意味するところは，時代と共に動いていると感じますが，最も狭い意味では「群の表現」を扱うことでしょうか．典型的なのは，群としてリー群を考え，表現がリー群からヒルベルト空間のユニタリ変換のなす群への連続な準同型となる場合です．群は抽象的な数学の概念，リー群とは多様体の構造を持つ群，そこからヒルベルト空間上へのユニタリ変換群への準同型が表現，と大学の数学科においてもかなり先に進まないと習わないことが続き，近づきにくくて難しい分野と思われる人が多いのでは，と思います．実際，私自身も数学の研究を始めた頃はそのように感じ，表現論に関わる研究に興味を持つようになるとは思ってもいませんでした．

後に表現論に関わりをもつようになり，1983 年に開催されたワルシャワ国際数学者会議では，リー群と表現論のセッションで，松木敏彦氏との共同研究の結果である半単純対称空間における離散系列表現について講演しました．昼食時に同席した数学者に「非可換調和解析，特にリー群の表現の研究をしている」と自分を紹介すると「代数，幾何，解析のすべてに関わっているので大変でしょう」と言われました．私は「解析を専門に研究していましたが，表現論を通して解析の知識をもとに代数や幾何が理解できるので，表現論はとても面白い分野です」と答えました．

私は 1967 年に東大の理 I に入学しました．当時も東大の理学部数学科進学生は，2 年生の冬学期（東大では 4 学期といいます）に数学の専門科目として線形代数，集合と位相，関数論の 3 科目を学びますが，私の学年は学部 2 年生のときに東大紛争が起こって遅れたため，3 年目の半ばからこれが始まりました．その頃，高校数学に行列は現れなかったので，大学で習う線形代数はとても新鮮で，学部 1 年の時から興味を持って学びました．4 学期の「線形代数」の最初の講義時間に，先生から「講義は行いません．学ぶべきことがらを 4 つに分けて挙げておくので自分で順に勉強して下さい．それぞれについて，すなわち計 4 回の試験をします」という宣言がありました．この頃の 4 学期の「線形代数」には，群論の初歩も入っていたので，4 つの最後が群論であったと思います．参考書がいくつか挙げられ，私は岩波全書の『群論』を買いました．その本の最後の章が群の表現でした．そこまですぐに読み進めたわけではありませんが，いったい表現など考えて何が面白いのか，長く理解できませんでした．

4 年生になって小松彦三郎先生の指導を受け，三輪哲二氏と共に定数係数の偏微分方程式を扱う Ehrenpreis の本『Fourier Analysis in Several Complex Variables』を読みました．定数係数の線型微分作用素は，平行移動で不変な微分作用素として特徴付けられます．幾何的対象をその上の関数の構造から理解しよう，という現代的な考えに立って，ユークリッド空間上の平行移動の作用

をその上の関数の空間への作用を通じて理解するとしましょう．関数の空間に平行移動は線型の変換を定義するので，それを最も簡単な空間に分解することを考えると，そのことは指数関数を集めて積分で表示するフーリエ積分表示にあたることが分かります．有限次元の空間の線型変換では固有空間分解にあたり，平行移動は指数関数にはスカラー倍として作用します．平行移動の無限小変換が偏微分ですから，フーリエ変換により定数係数線型偏微分作用素は掛け算作用素となって，解析が易しくなります．フーリエ解析が有効な理由です．この場合の群は可換リー群で既約表現は1次元となり，表現論的には易しいので，あえて表現論とは言わなくてよいのですが，例えば回転群が作用する球面やより一般の等質空間上での解析には，表現論が関わってきます．

一般の偏微分方程式でも，局所的には係数の変化が少ないと考えると，フーリエ解析が有効です．そのようなことでは説明できない方程式，例えば局所可解でない Lewy の方程式の理解は，1970 年頃に発展した新たな理論—超局所解析—が必要でした．私は三輪氏と SKK と呼ばれた佐藤–河合–柏原の論文を，原稿が作成されていく段階で校正を兼ねて読んで学びました．

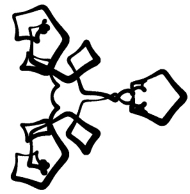
表現論においては，コンパクト群の場合はペーター・ワイルの理論，カルタン・ワイルの定理，ボレル・ヴェイユの定理などの一般論が分かっており，当時は無限次元表現を既約表現にもつ $SL(n,\mathbb{R})$ などの非コンパクトリー群の表現論や関連する調和解析が精力的に研究されました．実半単純リー群に対し，その上の2乗可積分関数のなすヒルベルト空間上の表現（正則表現）の既約分解を決定する，という Harish-Chandra の偉業が完成し，その全貌が理解されてきたのがこの頃でした．一方，非コンパクト型リーマン対称空間では，通常のフーリエ変換のように一通りの連続スペクトルしか現れず，Helgason が種々の解析を行っていました．Helgason は対称空間上の不変微分作用素の同時固有関数がその「境界」上の hyperfunction のポアソン積分で表示されることを例で示しました．一般の場合への拡張が Helgason–岡本予想で，それを解くため，解析的立場で表現論を研究していた岡本清郷氏が hyperfunction を使って研究していた柏原正樹氏と私を誘い，他の表現論の若手研究者の木幡篤孝氏，峰村勝弘氏，田中誠氏と共に総勢6人での共同研究を始めました．これが私が表現論に関わり始めるきっかけでした．不変微分作用素は代数的に書けますが，実際に座標を使って具体的に書かないと我々には分かりませんでした．そのような作業を通じて，お互いに問題を理解できたときに予想は解決していた，というのが実情です．

当初私は表現論についての理解はほとんどありませんでした．対称空間上の調和解析の講演を聞くと「$G=KAN$ を岩沢分解とする」というのが必ず最初に出てきます．すると私は現実感がなくなり，理解困難に陥りました．そこでまず $GL(n,\mathbb{R})$ の岩沢分解を具体的に計算することから始め，次第に分かるようになりました（その計算は岩波の「数学」の Helgason–岡本予想についての論説に書きました）．岩堀長慶先生が古典リー環やルート系について具体的に記述した東大のセミナリーノートも，理解に役立ちました．「境界」にあたるものを単位円板以外でも見えるように書きたい，と考えて，対称空間のコンパクト化を構成し，またそのようなものを関口次郎氏と調べていて，非リーマン対称空間が現れてくることに気づき，半単純対称空間上の解析へと興味が拡がっていきました．

表現論で新たな貢献をした数学者には，出発点が表現論でない人が多くいます．例えば，Harish-Chandra は物理が出発点です．私は，プリンストンの高等研究所で 1978 年から2年間研究員として過ごしましたが，彼はいつも物理の講演に出席していました．表現論は，数学のどこにも横たわっています．それを見つけて理解を進めていけば，数学的理解が深まると共に視野も拡がっていくことでしょう．新しい表現論が生まれてくることも期待できます．この特集がそのようなきっかけになれば幸いです．

（おおしま・としお，東京大学大学院数理科学研究科）

軌道分解と表現論



松木 敏彦

表現論の研究においては様々な軌道分解が用いられているが，本稿では筆者が関わっているある種の軌道分解とそれに関係する表現論について簡単な例を取り上げて紹介してみたい．一般的定義はなるべく省略して，具体例のみで考察することにしよう．

1. $\mathbb{R}^2$ への群の作用の例

例 1 正の実数のなす乗法群 $\mathbb{R}_+^\times = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ の座標平面 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ への作用（相似変換）S_r が

$$S_r(x, y) = (rx, ry)$$

によって定義できる．一つの (x, y) に対して，$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$\mathbb{R}_+^\times(x, y) = \{S_r(x, y) \mid r \in \mathbb{R}_+^\times\}$$

を (x, y) を通る $\mathbb{R}_+^\times$-軌道という．図 1 のように，$(x, y) \neq (0, 0)$ のとき，軌道は原点を端点とする半直線（原点を含まない）になる．原点以外の軌道は単位円周上の点によってパラメトライズできるので，$\mathbb{R}^2$ は次のように**軌道分解**できる[*1)]．

$$\mathbb{R}^2 = \{(0, 0)\} \sqcup \bigsqcup_{0 \le \theta < 2\pi} \mathbb{R}_+^\times(\cos\theta, \sin\theta)$$

*1) このように群の作用による軌道は互いに交わらない．これは群の各元 g に逆元 g^{-1} が存在し，g^{-1} の作用が g の作用の「逆変換」になっているからである．

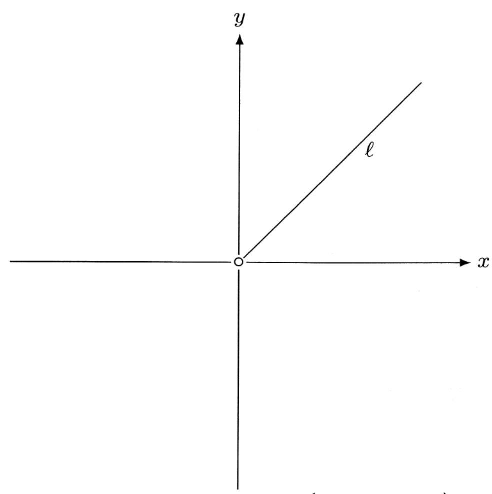


図 1 $\ell = \mathbb{R}_+^\times(1, 1) = \mathbb{R}_+^\times\left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right)$.

$\mathbb{R}^2$ 上の $\mathbb{C}$-係数多項式の集合を $\mathbb{C}[x, y]$ と表すとき，$\mathbb{R}_+^\times$ は

$$(S_r f)(x, y) = f(r^{-1}x, r^{-1}y)$$

によって，$\mathbb{C}[x, y]$ に作用する[*2)]．単項式 $f(x, y) = x^k y^l$ に対しては，$S_r f = r^{-(k+l)} f$ となる．

$$U_n = \{f \in \mathbb{C}[x, y] \mid S_r f = r^{-n} f \text{ for } r \in \mathbb{R}_+^\times\}$$

*2) 一般に，群 G が集合 M に左から作用する（結合律は $(gh)m = g(hm)$ for $g, h \in G, m \in M$）とき，M 上の関数空間 $\mathcal{F}$ への G の作用を $(gf)(m) = f(g^{-1}m)$ for $g \in G, m \in M, f \in \mathcal{F}$ で定義すれば，G は $\mathcal{F}$ に左から作用する．g の逆元を取らないと「右からの」作用になる．ただし，例 1 と後の例 2 については，群が可換なので左からの作用と右からの作用は一致して問題は起こらない．

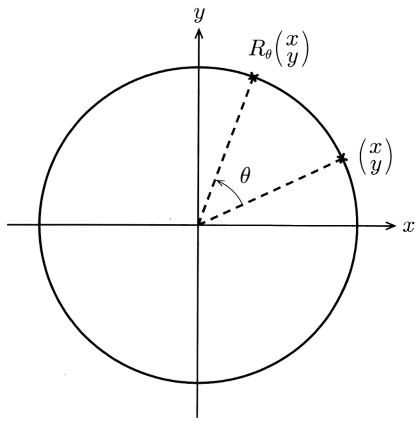


図2 $\mathbb{R}^2$ 上の SO(2)-軌道.

とおくと,

$$U_n = \mathbb{C}x^n \oplus \mathbb{C}x^{n-1}y \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}y^n$$

（すなわち，n 次斉次多項式の空間）であるので，U_n は $n+1$ 次元複素ベクトル空間であり，$\mathbb{C}[x,y]$ は $\mathbb{R}_+^\times$ の作用によって

$$\mathbb{C}[x,y] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} U_n \quad （代数的直和）$$

と固有空間分解できる.

例 2　実数 θ に対し，$\mathbb{R}^2$ の原点のまわりの回転

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

を考える．$\mathrm{SO}(2) = \{R_\theta \mid 0 \le \theta < 2\pi\}$（2 次特殊直交群）は 1 次変換の合成（= 行列の積）に関して群をなす．R_θ の作用は行列とベクトルの積

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\theta)x - (\sin\theta)y \\ (\sin\theta)x + (\cos\theta)y \end{pmatrix}$$

で与えられる．$\mathbb{R}^2$ 上の SO(2)-軌道は図 2 のように原点を中心とする円周である．さらに，複素数を用いて $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ を $z = x + iy \in \mathbb{C}$ と同一視すると，この作用は

$$R_\theta z = e^{i\theta} z \tag{1}$$

と書くこともできる．ここで $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$（オイラーの関係式）を用いた.

例 1 と同様に，次の式によって $g = R_\theta \in \mathrm{SO}(2)$ は $\mathbb{C}[x,y]$ に作用する.

$$(R_\theta f)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(R_\theta^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$

例 1 の S_r ($r \in \mathbb{R}_+^\times$) と R_θ は可換 ($S_r R_\theta = R_\theta S_r$) であるので,

$$R_\theta U_n = U_n$$

である．U_n を R_θ の作用に関して固有空間分解しよう.

$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f = x + iy$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x + iy$$

で定義すると

$$\begin{aligned}
&(R_\theta f)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\
&= f\left(R_\theta^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\
&= f\begin{pmatrix} (\cos\theta)x + (\sin\theta)y \\ -(\sin\theta)x + (\cos\theta)y \end{pmatrix} \\
&= (\cos\theta)x + (\sin\theta)y \\
&\quad + i(-(\sin\theta)x + (\cos\theta)y) \\
&= (\cos\theta - i\sin\theta)(x + iy) \\
&= e^{-i\theta} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

となるので,

$$R_\theta(x + iy) = e^{-i\theta}(x + iy) \tag{2}$$

が示された（注意：(1) と符号が逆で紛らわしいが，(1) は集合 $\mathbb{R}^2$ への作用であり，(2) は $\mathbb{R}^2$ 上の関数の集合への作用である）．同様にして

$$R_\theta(x - iy) = e^{i\theta}(x - iy) \tag{3}$$

が示される．(2) と (3) により

$$R_\theta(x+iy)^k(x-iy)^l = e^{i(-k+l)\theta}(x+iy)^k(x-iy)^l$$

が得られる．$(x+iy)^n, (x+iy)^{n-1}(x-iy), \ldots, (x-iy)^n$ は R_θ に関する固有ベクトルであり，固有値 $e^{-in\theta}, e^{-i(n-2)\theta}, \ldots, e^{in\theta}$ は generic な θ について互いに異なるので，U_n の $\mathrm{SO}(2) = \{R_\theta \mid 0 \le \theta < 2\pi\}$ による「同時固有空間分解」

$$U_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{C}(x+iy)^{n-k}(x-iy)^k$$

が得られた．

例 1 と例 2 の群作用は 2 次複素一般線形群 $\widetilde{G} = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^2$ への自然な作用

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

の部分群 H への「制限」である．例 1 では

$$H = H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \middle| r \in \mathbb{R}_+^\times \right\}$$

であり，例 2 では $H = \mathrm{SO}(2)$ である．ともに，$\mathbb{C}^2$ も $\mathbb{R}^2$ に制限した．H_1 は $\widetilde{G}$ のすべての元と可換である（H_1 は $\widetilde{G}$ の中心に含まれる）ので，

$$\widetilde{G} U_n = U_n$$

が成り立つ．U_n は $\widetilde{G}$-加群として既約である（すなわち，非自明な部分 $\widetilde{G}$-加群を含まない）ことが示せる．このようにして，$\widetilde{G} = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ の既約正則表現*3) の系列 $\{U_n\}$ が構成できる*4)．この $\widetilde{G}$-加群 U_n を 2 次複素特殊線形群 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \mid \det g = 1\}$ や 2 次特殊ユニタリ群

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \middle| |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

に制限したものも既約であり，さらに，すべての既約正則 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$-加群と既約 $\mathrm{SU}(2)$-加群がある U_n と同型であることが示せる*5)．

*3) $\widetilde{G}$ の U_n への作用が正則（複素解析的）という意味．

*4) U_n と剰余群 $\widetilde{G}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の 1 次元正則表現のテンソル積を取れば，$\widetilde{G}$ のすべての既約正則表現が構成できる．

*5) Borel–Weil の定理の最も簡単な例である．

2. SL(2, ℝ) と SO(2, ℂ) による $P^1(\mathbb{C})$ の軌道分解

2 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ の 1 次元部分空間の集合を 1 次元複素射影空間といい，$P^1(\mathbb{C})$ で表す．写像

$$\mathbb{C}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{x}{y} \qquad ((x, y) \neq (0, 0))$$

によって，$P^1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ $(x/0 = \infty)$ と見なせる．これは複素平面 $\mathbb{C}$ に一点 ∞ を付け加えてコンパクト化したもので 2 次元球面と同相であるので，**リーマン球面**（Riemann sphere）とも呼ばれる．この同一視の下で，$\widetilde{G} = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ の $P^1(\mathbb{C})$ への作用は 1 次分数変換

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$$

で与えられる．

$\widetilde{G}$ の部分群 $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ による $P^1(\mathbb{C})$ 上の軌道は

実軸	$P^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$,
上半平面	$M_+ \cong \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$,
下半平面	$M_- \cong \{z \mid \operatorname{Im} z < 0\}$

の 3 つである．

次に，$K = \mathrm{SO}(2)$*6) の複素化である $K_\mathbb{C} = \mathrm{SO}(2, \mathbb{C})$ を定義する．

$$K_\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C},\ a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

$K_\mathbb{C}$ による $P^1(\mathbb{C})$ 上の軌道も 3 つあって，

$$P^1(\mathbb{C}) - \{\pm i\}, \qquad \{i\}, \qquad \{-i\}$$

である．$P^1(\mathbb{C})$ 上の G-軌道と $K_\mathbb{C}$-軌道は図 3 のように自然に対応している*7)．

*6) $K = \mathrm{SO}(2)$ はコンパクト群であって，K を含む $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ のコンパクト部分群は K だけなので，**極大コンパクト部分群**（maximally compact subgroup）と呼ばれる．K の共役部分群 gKg^{-1} $(g \in G)$ も G の極大コンパクト部分群であることに注意する．

*7) これは旗多様体上の軌道対応[6)] の典型例である．

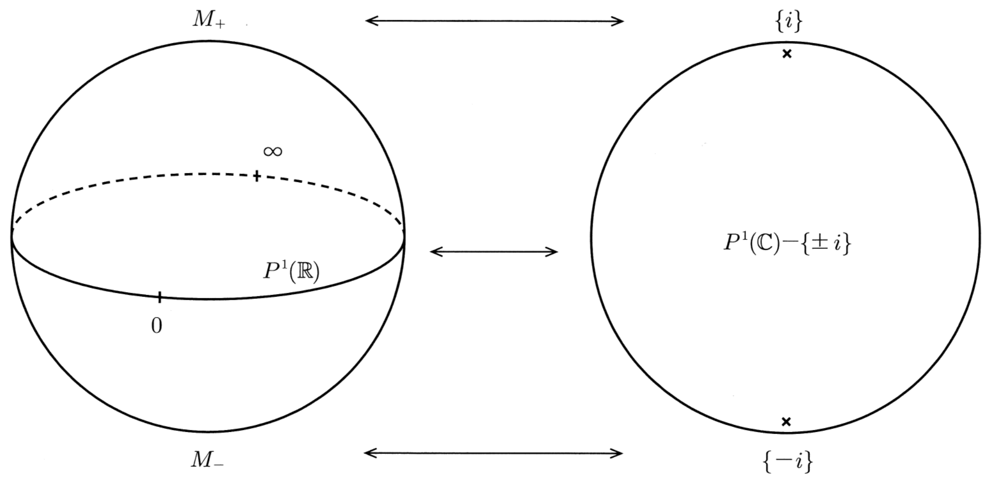


図 3　$P^1(\mathbb{C})$ 上の G-軌道と $K_{\mathbb{C}}$-軌道の対応.

3. SL(2, ℝ) の連続系列表現

$\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，$\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 上の λ-次斉次関数の空間

$$V_\lambda = \{f(x,y) \mid f(rx,ry) = r^\lambda f(x,y) \text{ for } r \in \mathbb{R}_+^\times\}$$

が定義できる*8)．ただし，$f(x,y)$ は無限回微分可能関数としておく．$m \in \mathbb{Z}$ に対し，R_θ の作用によって V_λ の 1 次元部分空間

$$\begin{aligned} V_{\lambda,m} &= \{f \in V_\lambda \mid R_\theta f = e^{im\theta} f\} \\ &= \mathbb{C} r^\lambda e^{-im\theta} \end{aligned} \tag{4}$$

が定義できる．ただし，2 行目の式で極座標表示 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を用いた．V_λ は実質的に単位円周 S^1 上の関数なので，フーリエ級数の理論により，代数的直和

$$V_{\lambda,K} = \bigoplus_{m=-\infty}^{\infty} V_{\lambda,m}$$

は V_λ の (S^1 上の一様収束位相に関して) 稠密な部分空間である．これは $K = \mathrm{SO}(2)$ の作用が有限次元の範囲に納まる部分空間なので，**K-有限***9) な関数の空間と呼ばれる．

V_λ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle f,h \rangle = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\overline{h(\cos\theta,\sin\theta)}\,d\theta$$

で定義することができ，L^2-完備化 $\hat{V}_\lambda$ ができる*10)．ヒルベルト空間 $\hat{V}_\lambda$ 上に $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ が作用し，G の連続な表現が得られる．すなわち，

$$G \times \hat{V}_\lambda \ni (g,f) \mapsto L_g f \in \hat{V}_\lambda$$

が連続ということである．ただし，$\hat{V}_\lambda$ の位相は関数の S^1 への制限の L^2 ノルムによる位相である．V_λ の位相に関する考察は省略する．

この内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は K-不変であるが，一般に $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の作用により不変でない．しかし，$f \in \hat{V}_\lambda$，$h \in \hat{V}_\mu$ に対し，

$$\mu = -\overline{\lambda} - 2$$

のとき $\langle f,h \rangle$ は G の作用により不変である．すなわち

$$\langle L_g f, L_g h \rangle = \langle f,h \rangle \qquad \text{for } g \in G$$

が成り立つ．特に，

$$\mathrm{Re}\,\lambda = -1$$

*8)　$r^\lambda = e^{\lambda \log r}$ である．さらに，$z = x + iy$ に対し，$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$（オイラーの関係式）である．

*9)　通常，関数空間というベクトル空間に G が作用するという見方により，V_λ^K は **K-有限ベクトル**（K-finite vectors）の空間と呼ばれる．

*10)　G の作用を考えなければ，$\hat{V}_\lambda$ を S^1 に制限したものは通常の 2 乗可積分関数の空間 $L^2(S^1)$ である．

のとき, $\hat{V}_\lambda$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は G-不変になるので, $\hat{V}_\lambda$ は G の**ユニタリ表現**（unitary representation）を与える．

G の中心 $Z=\{\pm I_2\}$ の作用により，$\hat{V}_\lambda$ は

$$\hat{V}_\lambda=\hat{V}_{\lambda,\mathrm{even}}\oplus\hat{V}_{\lambda,\mathrm{odd}}$$

と 2 つの G-加群の直和に分解する．ただし，

$$\hat{V}_{\lambda,\mathrm{even}}=\{f\in\hat{V}_\lambda \mid f(-x,-y)=f(x,y)\},$$
$$\hat{V}_{\lambda,\mathrm{odd}}=\{f\in\hat{V}_\lambda \mid f(-x,-y)=-f(x,y)\}$$

である．G-加群 $\hat{V}_{\lambda,\mathrm{even}}$, $\hat{V}_{\lambda,\mathrm{odd}}$ は $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の**連続系列表現**（continuous series representation）と呼ばれる．K-有限な関数の空間は

$$V^K_{\lambda,\mathrm{even}}=\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty}V_{\lambda,2k},$$
$$V^K_{\lambda,\mathrm{odd}}=\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty}V_{\lambda,2k+1}$$

である．次のことが示せる[4,5,7]．

命題 (1) $\lambda\notin 2\mathbb{Z}$ のとき，$\hat{V}_{\lambda,\mathrm{even}}$ は既約 G-加群である．すなわち，非自明な G-不変閉部分空間（$\hat{V}_\lambda$ の位相に関して）を持たない．

(2) $\lambda\notin 2\mathbb{Z}+1$ のとき，$\hat{V}_{\lambda,\mathrm{odd}}$ は既約 G-加群である．

G のリー環 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ は次の空間（3 次元実ベクトル空間）

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\ \middle|\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

に括弧積

$$[X,Y]=XY-YX \qquad \text{for } X,Y\in\mathfrak{g}$$

を与えたものである．指数写像 $\mathfrak{g}\ni X\mapsto e^X\in G$ が

$$e^X=I_2+X+\frac{1}{2!}X^2+\cdots+\frac{1}{n!}X^n+\cdots$$

によって定義される．$f\in V_\lambda$ は無限回微分可能と仮定したので，$X\in\mathfrak{g}$, $f\in V_\lambda$ に対し，

$$L_X f=\frac{d}{dt}L_{e^{tX}}f|_{t=0}\in V_\lambda$$

が定義される．これは V_λ の**微分表現**と呼ばれる．このとき

$$\mathfrak{g}V^K_\lambda\subset V^K_\lambda$$

が示せる．V^K_λ には K も作用するので，V^K_λ は **$(\mathfrak{g},K)$-加群**（あるいは **Harish–Chandra 加群**）と呼ばれる．

4. SL(2, ℝ) の有限次元表現と離散系列表現

まず，前節で用いた $\mathbb{R}^\times_+$ 上の関数 $r\mapsto r^\lambda$ が $\mathbb{C}^\times=\mathbb{C}-\{0\}$ 上の 1 価正則関数に拡張されるための必要十分条件は $\lambda\in\mathbb{Z}$ であることに注意する．さらに，(4) の K-有限関数 $f(x,y)=r^\lambda e^{-im\theta}\in V_{\lambda,m}$ を x,y で表すと

$$f(x,y)=(x+iy)^{(\lambda-m)/2}(x-iy)^{(\lambda+m)/2} \quad (5)$$

となることに注意する．射影 $\pi:\mathbb{C}^2-\{(0,0)\}\to P^1(\mathbb{C})$ を $\pi(x,y)=\mathbb{C}^\times(x,y)$ で定義する．$\mathbb{R}^2-\{0\}$ で定義されていた $f(x,y)$ が

$$\pi^{-1}(P^1(\mathbb{C})-\{\pm i\})$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid x+iy\neq 0,\ x-iy\neq 0\}$$

の上の 1 価正則関数に拡張されるための必要十分条件は

$$\frac{\lambda-m}{2},\ \frac{\lambda+m}{2}\in\mathbb{Z},$$

すなわち

$$\lambda\in\mathbb{Z},\quad m\in\lambda+2\mathbb{Z} \quad (6)$$

である．

さらに (5) が $\pi^{-1}(i)=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid x-iy=0\}$ において正則であるための条件は $m\geq-\lambda$ であり，$\pi^{-1}(-i)=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid x+iy=0\}$ において正則であるための条件は $m\leq\lambda$ である．したがって，条件 (6) の下で

$$V^K_{\lambda,+}=\bigoplus_{k=0}^{\infty}V_{\lambda,-\lambda+2k},\quad V^K_{\lambda,-}=\bigoplus_{k=0}^{\infty}V_{\lambda,\lambda-2k}$$

は V^K_λ の部分 $(\mathfrak{g},K)$-加群である．$\lambda=n\geq 0$ の

とき，

$$V^K_{n,+} \cap V^K_{n,-} = U_n$$

は有限次元 $(\mathfrak{g}, K)$-加群であり，有限次元 G-加群になる*11)．さらに

$$V^K_{n,+}/U_n \cong V^K_{-n-2,+}, \quad V^K_{n,-}/U_n \cong V^K_{-n-2,-}$$

は**離散系列表現**(discrete series representation)*12)と呼ばれる G の既約ユニタリ表現の K-有限ベクトルの空間になっている．$\lambda = -1$ のとき，

$$V^K_{-1} = V^K_{-1,+} \oplus V^K_{-1,-}$$

はユニタリ表現の直和分解 $\hat{V}_{-1} = \hat{V}_{-1,+} \oplus \hat{V}_{-1,-}$ を与える*13)．

このように，V^K_λ の組成列は $P^1(\mathbb{C})$ の $K_{\mathbb{C}}$-軌道分解によって記述できることがわかるが，これは次節で述べるように singular case を除いて一般的に解決されている．

5. Kazhdan–Lusztig 予想と D-加群

一般に複素半単純リー群 $G_{\mathbb{C}}$ に対して，ボレル部分群 B が定義され，等質空間 $G_{\mathbb{C}}/B$ は full flag manifold*14) と呼ばれる．例えば，$G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ のとき，B として $G_{\mathbb{C}}$ に含まれる上三角行列のなす群がとれ，$G_{\mathbb{C}}/B$ は $n(n-1)/2$ 次元コンパクト複素多様体になる．$n = 2$ のときは $G_{\mathbb{C}}/B \cong P^1(\mathbb{C})$ である．

$G_{\mathbb{C}}/B$ の B-軌道分解は Bruhat 分解と呼ばれ，ワイル群と呼ばれる有限群 W によってパラメトライズされる．$G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ のときは W は n 次対称群であって，$|W| = n!$ である．この軌道分解に関して，Verma 加群という標準的な $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-加群が定義されるが，その組成列を記述する予想が Kazhdan と Lusztig によって提起された．この予想は Beilinson–Bernstein[1] と Brylinski–柏原[2] によって独立に，D-加群という代数解析の方法を用いて解決された*15)．

この方法は $G_{\mathbb{C}}/B$ 上の軌道の数が有限の場合に適用できるので，Vogan によって $(\mathfrak{g}, K)$-加群の場合の組成列の求め方が示された[10]．しかしながら，無限小指標 (infinitesimal character) が singular な場合，$\mathfrak{g}$-加群と D-加群の対応が崩れるために，問題は多く残っている．

---

*11) 注意：$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ の有限次元表現は自明な表現（G のすべての元に対して恒等変換を与える表現）を除いてユニタリ表現ではない．すべてのノンコンパクト単純リー群についてそうである．

*12) $L^2(G)$ を既約分解するときに離散的に現れる表現であり，Harish–Chandra による一連の研究が有名である．半単純対称空間（アフィン対称空間）G/H の場合にも拡張され[3]，代数解析的方法を用いてすべて構成された[8]．

*13) $\hat{V}_{-1,+}$，$\hat{V}_{-1,-}$ は limit of discrete series あるいは singular unitary 表現と呼ばれる．

*14) B を含む $G_{\mathbb{C}}$ の部分群 P は放物型部分群と呼ばれ，$G_{\mathbb{C}}/P$ は**旗多様体**(flag manifold) と呼ばれる．したがって，$G_{\mathbb{C}}/B$ は $G_{\mathbb{C}}$ の旗多様体の中で最大次元のものである．注意：B の共役部分群 gBg^{-1} $(g \in G_{\mathbb{C}})$ はすべてボレル部分群と呼ばれる．

*15) 谷崎–堀田の解説書[9]がある．

参考文献

1) A. Beilinson and J. Bernstein, Localisation de $\mathfrak{g}$-modules, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **292** (1981), 15–18.
2) J.-L. Brylinski and M. Kashiwara, Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, *Invent. Math.* **64** (1981), 387–410.
3) M. Flensted-Jensen, Discrete series for semisimple symmetric spaces, *Ann. of Math.* **111** (1980), 253–311.
4) 平井武・山下博,『表現論入門セミナー』, 遊星社 (2003).
5) 小林俊行・大島利雄，『リー群と表現論』，岩波書店 (2005).
6) T. Matsuki, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups, *J. Math. Soc. Japan* **31** (1979), 331–357.
7) 岡本清郷,『等質空間上の解析学』, 紀伊国屋書店 (1980).
8) T. Oshima and T. Matsuki, A description of discrete series for semisimple symmetric spaces, *Adv. Studies in Pure Math.* **4** (1984), 331–390.
9) 谷崎俊之・堀田良之，『D 加群と代数群』，シュプリンガー・ジャパン (1995).
10) D.A. Vogan, Irreducible characters of semisimple Lie groups III, *Invent. Math.* **71** (1983), 381–417.

（まつき・としひこ，龍谷大学文学部）

フーリエ解析と表現論

河添　健

特集：「フーリエ解析の力」(2007年10月号) でも同様のテーマで寄稿したが，今回は表現論を主体に本文を構成する．一部記述が重複することをお許しいただきたい．とは言え出発点はフーリエの理論である．以下の積分や級数の厳密な収束条件を無視すれば，**フーリエ級数論**では，$\mathbb{R}$ 上の周期 2π の関数 f に対してフーリエ係数を

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad n\in\mathbb{Z}$$

と定義したとき，反転公式

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{inx},$$

およびパーセバルの等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2$$

が成立する．また**フーリエ積分論**では，$\mathbb{R}$ 上の関数 f に対してフーリエ変換を

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}dx, \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

と定義すれば反転公式

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda,$$

およびプランシェレルの等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx=\int_{\mathbb{R}}|\hat{f}(\lambda)|^2d\lambda$$

が成立する．$\mathbb{R}$ 上の周期 2π の関数 f は，$f(x)=F(e^{ix})$ とすることによりトーラス $\mathbb{T}$ の関数 F とみなすことができる．よってフーリエ級数論は $\mathbb{T}$ 上の，フーリエ変換論は $\mathbb{R}$ 上の理論である．ここで，2つの話がとても似た形であることがポイントである．なぜ，似た形になるのか？ このことに明確に答え，さらに他の似たものを構成することが本稿の目的である．そのためには表現論の世界に足を踏み入れることになる．

1. 表現論のない時代からワイルへ

フランス・アカデミーの懸賞問題に答えるべくフーリエが熱伝導の研究を始めたのは1800年頃で最初に熱伝導方程式を導き，その解を求める過程で前述の“すべての周期関数は三角級数で書ける”ことを用いた．解は得られたものの，任意の関数が三角級数で書けることの説明はできなかった．この頃はコーシー以前であり，数学の諸概念――関数・積分・収束など――が確立しておらず厳密な証明は無理であった．1829年にディリクレが単調関数に関する反転公式の各点収束性を証明する．フーリエ変換に関する反転公式に対しても類似の証明で広義積分に対する各点収束が得られる．これらの公式の厳密化や一般化が解析学の発展に大きくつながる．

19世紀の後半から数列や関数を個々の対象として扱うのではなく，それらの集合を考える，すなわち数列の空間や関数の空間を考えるようになる．背景には代数学，とくに後述する群論などの構造論の発展があり，ここにハーン，バナッハを中心として関数解析学が始まり，ヒルベルト空間の研究が進む．

このような視点からフーリエ級数論の鍵となる $\{e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を見ると，これらは $\mathbb{T}$ 上の 2 乗可積分関数の全体 $L^2(\mathbb{T})$ に $(f,g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$ と内積を入れた場合の正規直交系に他ならないことが分かる．パーセバルの等式は $L^2(\mathbb{T})$ と 2 乗和が有界な数列の全体 $l^2(\mathbb{Z})$ のヒルベルト空間としての同型を意味する．1907 年にリースとフィッシャーは L^2 空間の完備性を導く．こうしてフーリエ級数論はヒルベルト空間の直交系の理論として一般化される．また e^{inx} や $e^{i\lambda x}$ はラプラス作用素の固有関数であり，フーリエ級数論やフーリエ変換論はそれぞれ離散スペクトルおよび連続スペクトルによる分解に他ならない．いろいろな微分作用素の固有関数系による関数の展開は物理学における諸問題を解く上で非常に有効となる．この際に固有関数として多くの特殊関数が現れる．

このように 20 世紀の初めに関数解析学は大きく発展する．フォン・ノイマンはヒルベルト空間を公理的に扱い，後のウィグナー，ハイゼンベルグによる量子力学の数学的解釈を与える礎を築く．この量子力学と数学の繋がりは数学の研究にも大きな刺激となる．対称構造の研究から 1930 年代のワイルの**ユニタリ表現論**やマレー，フォン・ノイマン，ゲルファント，ナイマルクによる**作用素環**の研究へと繋がる．

2. 表現論の始まり——有限群の表現論

ワイルがユニタリー表現論—ユニタリー作用素の理論を始める以前に，19 世紀末から 20 世紀にかけて有限群の表現論および指標の理論がフロベニウス，バーンサイド，シューアらにより完成する．G が**有限アーベル群**のときは

$$\chi : G \to \mathbb{C}$$

なる写像で $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b),\ \forall a,b \in G,$ を満たすものを指標という．G の位数 $|G|$ が有限なので，$\chi(g)$ は 1 の $|G|$ 乗根である．したがって $\chi : G \to U(1)$ である．ここで $U(1)$ は 1 次のユニタリー群で絶対値 1 の複素数全体である．このような指標の全体 $\hat{G}$ を G の**双対**と呼ぶ．このとき $G \cong \hat{G}$ となり有限群として同型になる（双対定理）．また $f : G \to \mathbb{C}$ なる関数に対してフーリエ変換を

$$\hat{f}(\chi) = \frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_{g\in G} f(g)\overline{\chi(g)}, \quad \chi \in \hat{G}$$

と定めれば，反転公式

$$f(g) = \frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_{\chi\in\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi(g), \quad g \in G,$$

およびプランシェレルの等式

$$\sum_{g\in G}|f(g)|^2 = \sum_{\chi\in\hat{G}}|\hat{f}(\chi)|^2$$

が成り立つ．とくに $\{|G|^{-1/2}\chi \mid \chi \in \hat{G}\}$ は G 上の直交系となる．G が一般の**有限群**のときは

$$\pi : G \to U(n)$$

なる n 次ユニタリー行列全体への準同型写像を考える．π は G のユニタリー表現と呼ばれる．このようなユニタリー表現の中で既約なもの全体（同値類）を $\hat{G}$ とする．このとき $\pi \in \hat{G}$ に対してそのトレース $\chi_\pi(\cdot) = \mathrm{tr}(\pi(\cdot)) : G \to \mathbb{C}$ を**指標**と呼ぶ．ここで G の群環 $\mathbb{C}G$ を導入する．$\mathbb{C}G$ は G の要素を基底とする $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\{c_g g \mid c_g \in \mathbb{C}, g \in G\}$ でその環としての積を $(\sum_{g\in G} a_g g)\cdot(\sum_{h\in G} b_h h) = (\sum_{gh\in G} a_g b_h gh)$ で与える．このようにすると群環 $\mathbb{C}G$ の要素が指標 χ_π を用いて上のように展開できるというのが有限群の指標理論である．

3. 基本形の完成——局所コンパクト・アーベル群・コンパクト群

前節までに $\mathbb{T}, \mathbb{R}$，有限群 G 上の関数の展開に関して類型が得られた．当然，この類型を他の群へ拡張する試みがなされる．そのためには群のユニタリー表現を求める必要がある．20 世紀の前半までに局所コンパクト・アーベル群とコンパクト群において類型が完成する．

G が**局所コンパクト・アーベル群**のとき，その既約ユニタリー表現は 1 次元である．したがって

その同値類の全体 $\hat{G}$ は指標の全体と一致する．G の構造と $\hat{G}$ の決定はポントリャーギンにより1920年代後半よりなされる．$\hat{G}$ も局所コンパクト・アーベル群となり双対群と呼ばれる．このとき $\hat{G}$ の双対は G となる．G 上の関数 f に対してそのフーリエ変換は

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}dx, \quad \chi \in \hat{G}$$

として定義される．ここで dx はハール測度と呼ばれる不変測度である．1940年にヴェイユより反転公式

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi(x)d\nu(\chi), \quad x \in G,$$

およびフランシェレルの等式

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \int_{\hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi)$$

が得られる．ここで $d\nu(\chi)$ は $\hat{G}$ におけるハール測度である．G および $\hat{G}$ のハール測度が離散測度となるとき，積分記号は和記号で書き直すことができる．$G = \mathbb{T}$ のとき，$\hat{\mathbb{T}} = \{\chi_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$, $\chi_n(x) = e^{inx}$, $d\nu(\chi_n) = \delta_n$（ディラック測度）である．$G = \mathbb{R}$ のとき，$\hat{\mathbb{R}} = \{\chi_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$, $\chi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$, $d\nu(\chi_\lambda) = d\lambda$（ルベーグ測度）である．有限アーベル群の場合も離散位相を入れることにより，局所コンパクト・アーベル群となり同じ枠組みに入る．こうして前述の3つの類型は局所コンパクト・アーベル群上のフーリエ変換として一つの枠組みに捉えることができた．

G が**コンパクト群**のとき，その既約ユニタリー表現は有限次元であり，$\pi : G \to U(n)$ なる準同型となる．シューアは $SO(n)$ や $SU(n)$ の表現論を研究し，1920年代にワイルが $\hat{G}$ とその指標を決定する．さらにワイルはその次元 $n = d(\pi)$ を求める次元公式や行列 $\pi(g)$ の (i,j) 成分 $\pi_{ij}(g)$（行列要素）の G 上における直交性を証明する．そしてペーターとともにコンパクト群上のフーリエ級数論を完成させる．

定理（ペーター・ワイル） G をコンパクト群とし，ハール測度 dg を $\int_G dg = 1$ に正規化する．このとき $\{\sqrt{d(\pi)}\pi_{ij}(g); 1 \leq i,j \leq d(\pi), \pi \in \hat{G}\}$ は $L^2(G)$ の完備正規直交基底となる．

この定理より G 上の関数 f のフーリエ係数を

$$\hat{f}_{i,j}(\pi) = \sqrt{d(\pi)} \int_G f(g)\overline{\pi_{i,j}(g)}dg, \quad \pi \in \hat{G}$$

と定義すれば，反転公式

$$f(g) = \sum_{\pi \in \hat{G}} \sum_{1 \leq i,j \leq d(\pi)} \sqrt{d(\pi)}\hat{f}_{i,j}(\pi), \quad g \in G$$

およびプランシェレルの等式

$$\int_G |f(g)|^2 dg = \sum_{\pi \in \hat{G}} \sum_{1 \leq i,j \leq d_\pi} |\hat{f}_{i,j}(\pi)|^2$$

が成立する．

局所コンパクト・アーベル群およびコンパクト群上でフーリエの理論の類型が完成したが，この類型を**位相群**——群演算が連続となる位相をもつ群——とくに群演算が実解析的となる**リー群**へ拡張することが研究される．しかしこの過程を遂行するには，リー群 G 上のハール測度（G 不変測度）dg の研究や G の既約ユニタリー表現の同値類の全体 $\hat{G}$ の決定が必要となる．ここで注意することは後述するように一般に表現として無限次元表現が現れることである．すなわち表現 π は

$$\pi : G \to U(\mathcal{H})$$

なる準同型となる．ここで $\mathcal{H}$ はヒルベルト空間であり，$U(\mathcal{H})$ はその上のユニタリー作用素の全体である．また反転公式を得るためには $\hat{G}$ 上の測度 $d\pi$（プランシェレル測度）を求めなくてはならない．これらがすべて整えば，G 上の関数 f に対して

$$\hat{f}(\pi) = \int_G f(g)\pi(g)dg, \quad \pi \in \hat{G}$$

なる作用値フーリエ変換を定義し，反転公式

$$f(g) = \int_{\hat{G}} \mathrm{tr}(\hat{f}(\pi)\pi(g^{-1}))d\pi, \quad g \in G,$$

およびプランシェレルの等式

$$\int_G |f(g)|^2 dg = \int_{\hat{G}} \|\hat{f}(\pi)\|_{\mathrm{HS}}^2 d\pi$$

が得られることが期待される．ここで $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ は作用素のヒルベルト・シュミット ノルムである．この $(G, dg; \hat{G}, d\pi)$ を求める問題は20世紀後半から今日に至るまで非可換調和解析の主題の一つである．

4. 非可換・非コンパクトな群の場合

前述の $(G, dg; \hat{G}, d\pi)$ の枠組みを求める問題は容易ではない．次のステップは非可換・非コンパクトな局所コンパクト群である．その例である 3×3 行列からなる**ハイゼンベルグ群**の場合は，量子力学との関連からワイル，フォン・ノイマンらがその表現論を早くから完成させる．このとき既約ユニタリー表現として1次表現と $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ を表現空間とする無限次元表現 π が現れる．本質的な表現がこの π のみであること，および $(\pi(g)f)(x)$, $g \in G, f \in \mathcal{H}$, $x \in \mathbb{R}$, が $f(x)$ の平行移動と $U(1)$ の積で記述できることから，その反転公式は古典フーリエ変換の反転公式を用いることにより容易に得ることができた．一方，行列式が1の 2×2 実行列の全体 $\boldsymbol{SL(2,\mathbb{R})}$ や複素行列の全体 $\boldsymbol{SL(2,\mathbb{C})}$ の場合は $(G, dg; \hat{G}, d\pi)$ の決定には困難を要した．1947年に2つの論文が発表される．一つはバルグマンによる $SL(2,\mathbb{R})$ 上のフーリエ解析であり，もう一つはゲルファント・ナイマルクによる $SL(2,\mathbb{C})$ 上のフーリエ解析である．これらの場合も無限次元表現が現れ，かつ一つだけではない．$G = SL(2,\mathbb{R})$ の場合，自明な表現を除くと4種類の既約ユニタリー表現が現れる．このときその中の主系列表現と離散系列表現を用いてフーリエ変換は定義される．

主系列表現：$\pi_{j,1/2+i\lambda}$ $(\lambda \in \mathbb{R}, j = 0, 1/2)$

$$\pi_{j,s} : G \to U(L^2(\mathbb{R})),$$

$$(\pi_{j,s}(g)f)(x) = (\mathrm{sgn}(cx+d))^{2j}|cx+d|^{-2s} f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right).$$

離散系列表現：$\pi_{\pm n}$ $(n \in \mathbb{Z}/2, n \geq 1)$

$$\pi_n : G \to U(H_n^2(\mathbb{C}^+)),$$

$$(\pi_n(g)f)(x) = (cx+d))^{-2n} f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right).$$

いずれの場合も

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$$

である．離散系列表現の表現空間 $H_n^2(\mathbb{C}^+)$ は上半平面 $\mathbb{C}^+$ で $\int\int_{\mathbb{C}^+} |f(z)|^2 y^{2n-2} dxdy < \infty$ となる正則関数の全体（バルグマン空間）である．π_{-n} に関しては正則関数を反正則関数に置き換えて定義する．この2つの既約ユニタリー表現を用いたフーリエ変換の反転公式は次のようになる．

$$\begin{aligned} f(g) = &\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{tr}(\hat{f}(\pi_{0,1/2+i\lambda})\pi_{0,1/2+i\lambda}(g^{-1})) \\ &\times \lambda \tanh \pi\lambda d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{tr}(\hat{f}(\pi_{1/2,1/2+i\lambda})\pi_{1/2,1/2+i\lambda}(g^{-1})) \\ &\times \lambda \coth \pi\lambda d\lambda \\ &+ \frac{1}{4\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}/2, n\geq1}(2n-1)\Big(\mathrm{tr}(\hat{f}(\pi_n)\pi_n(g^{-1})) \\ &+ \mathrm{tr}(\hat{f}(\pi_{-n})\pi_{-n}(g^{-1}))\Big). \end{aligned}$$

プランシェレルの等式は省略するが，左辺は f の L^2 ノルム，右辺は作用素フーリエ変換のヒルベルト・シュミット ノルムのプランシェレル測度 $d\pi$ による積分とすればよい．$SL(2,\mathbb{C})$ の場合もしかりである．この場合は離散系列は存在せず反転公式は積分項のみからなる．

5. 抽象プランシェレル測度

1節で作用素環論の萌芽に触れたが，1930年代にマレー，フォン・ノイマンのフォン・ノイマン環に関する一連の研究が発表される．フォン・ノイマン環はその中心がスカラーのみからなるとき因子環と呼ばれる．π がユニタリー表現であれば $\pi(G) = \{\pi(g) \mid g \in G\}$ はユニタリー作用素の集合であり，それを含むフォン・ノイマン環が生成される．G が有限群であれは群環 $\mathbb{C}G$ である．この表現 π に付随する環が因子環であるとき π は因子表現と呼ばれる．例えば既約表現の直和は因子表現であり，このような因子表現をタイプI型と呼ぶ．そして群の因子表現がすべてタイプI型であるとき，その群は**タイプI型**と呼ばれる．マレー，フォン・ノイマンの発見の一つは，局所コンパクト群はタイプI型とは限らないことである．

さらに G がタイプI型の場合，$\hat{G}$ 上のプランシェレル測度が一意に存在し

$$\int_G |f(g)|^2 dg = \int_{\hat{G}} \mathrm{tr}(\hat{f}(\chi)\hat{f}(\chi)^*) d\nu(\chi)$$

が成立する．プランシェレルの等式だが，表現論の立場から見れば $L^2(G)$ の正則表現の既約分解に他ならない．コンパクト群，局所コンパクト アーベル群，連結べき零群，連結半単純リー群などはタイプI型であるが，連結可解群の中にはタイプI型でないものもある．このようにタイプI型の群についてはプランシェレル測度の存在と一意性が得られたが，それを具体的に構成することは別問題である．

6. ハリシュ・チャンドラの業績

1960年代からハリシュ・チャンドラによる実および p 進**半単純リー群**のプランシェレル測度を決定する研究が始まる．リー環論を初めとし，その研究は広範囲に及び今日の表現論の礎となる．20世紀の数学を代表とする業績である．その主たる成果は $L^2(G)$ の部分表現として得られる**離散表現**と呼ばれる表現の特徴付けである．この成果がプランシェレル測度の決定に寄与する．半単純リー群には放物型部分群と呼ばれる部分群の族がある．各放物型部分群は $P = MAN$ なる分解をもち，この M の離散表現から G のユニタリー表現 $\pi_{P,\lambda}$ を誘導することができる．λ は A のリー環の双対を動く．このときこの $\pi_{P,\lambda}$ の**行列要素**（Eisenstein 積分）が指標の役割を演じる．放物型部分群の同値類をすべて動かすことにより，$L^2(G)$ の正則表現の分解，すなわちフーリエの理論の類型が完成する．4節で述べた $SL(2,\mathbb{R})$ の場合，放物型部分群は G 自身と $P = \{\pm 1\}AN$（A は対角行列の全体，N は対角が1な上三角行列の全体）の2つである．π_G が G の離散系列表現 $\pi_{\pm n}$，$\pi_{P,\lambda}$ が主系列表現 $\pi_{j,\lambda}$ に対応する．

このようにして G が半単純リー群の場合のプランシェレル測度は求められたが，注意することは $SL(2,\mathbb{R})$ の場合と同様に，プランシェレル測

度の台は $\hat{G}$ の全体ではない．したがって $\hat{G}$ を決める問題は引き続き未解決である．

7. べき零群・可解群の場合

1950 年代の Mackey の誘導表現に関する理論はべき零リー群の既約ユニタリー表現の構成に大きな示唆を与え，Dixmier, Kirillov, Pukanzsky, Duflo, Moore らの研究に繋がる．当初は解析的なアプローチであったが，1962 年に Kirillov はリー環 $\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ の G 軌道を考えるという幾何学的かつ代数的な手法を見つけ，$\hat{G} \cong \mathfrak{g}^*/G$ となることを示す．続いて Pukanzsky がべき零リー群に対するプランシェレル測度を決定する．この方向は受け継がれ，1970 年代の Auslander–Kostant によるタイプ I 型の可解リー群の $\hat{G}$ の決定，Pukanzsky による非タイプ I 型の可解リー群における軌道方法の研究，Duflo–Moore による指数型可解リー群のプランシェレル測度の研究などへ繋がる．前節の半単純リー群に比べると，可解リー群はその代数的構造が弱い．このことから既約ユニタリー表現に関しては多くの未解決な問題が残されている．

8. ヴェイユ表現とフーリエ変換

今までの話は群 G の既約ユニタリー表現 π を用いて作用素値フーリエ変換 $\hat{f}(\pi)$ を定義し，フーリエ理論の類型を考えるものであった．ここでは古典フーリエ変換 $\mathcal{F}$，すなわち $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ が G のある要素 ω と表現 π を使って $\mathcal{F} = \pi(\omega)$ と書ける例を紹介する．

4 節でも触れたが，ハイゼンベルグ群 H_n の既約ユニタリー表現の同値類の全体 $\hat{H}_n$ は 1 次元表現と $L^2(\mathbb{R}^n)$ に実現されるシュレディンガー表現 π からなる．$\pi : H_n \to U(L^2(\mathbb{R}^n))$ である．ところで H_n の自己同型群はシンプレクティック群 Sp_{2n} である．ここで $\sigma \in Sp_{2n}$ に対して $\pi^\sigma(g) = \pi(\sigma \cdot g), g \in H_n$，とすれば π^σ は H_n の新しい既約ユニタリー表現となる．しかし $\hat{H}_n$ の構造から $\pi^\sigma \cong \pi$ と π と同値でなくてはならない．したがって $\rho(g) \in U(L^2(\mathbb{R}^n))$ が存在し，$\rho(g)\pi(g)\rho(g^{-1}) = \pi^\sigma(g)$ となる．定数倍の曖昧さを解消するために Sp_{2n} の 2 重被覆群——メタプレクティック群 Mp_{2n} を考えると，ρ は $\rho : Mp_{2n} \to U(L^2(\mathbb{R}^n))$ なる表現となる．この表現は**ヴェイユ表現**と呼ばれ，1964 年にヴェイユはこの表現を用いて整数論における θ-関数の表現論的解釈を与えた．またヴェイユ表現は極小なべき零軌道の量子化を与える．このとき，Mp_{2n} の中に反転元と呼ばれる要素 w が存在し

$$\rho(w) = \mathcal{F} \text{ (フーリエ変換)}$$

となる．とくに $\rho(w)^2 = I$ となり，フーリエ変換の逆変換が再びフーリエ変換であることに対応する．

この枠組みを一般化することによりフーリエ変換の一般化が期待される．しかしヴェイユ表現自体が極小表現と呼ばれる非常に特殊な表現であり，そのような表現の存在と構成が課題となる．1970 年代に数理物理の視点から $O(4,2)$ の**極小表現**が研究され，$O(p,q)$ の極小表現へと拡張する．2003 年に小林–Ørsted はこの極小表現 ρ を L^2 空間に実現し，反転元 w を求めることに成功した．ここにフーリエ変換の一般化である $\rho(w)$ が得られた．この積分変換の具体形については参考文献を参照されたい．

9. ウェーブレット解析

19 世紀の初頭にフーリエは関数を三角級数に展開することにより熱伝導方程式の解を得た．その後関数を三角級数で近似することは多くの応用を生み，理学・工学・光学・医学・音楽・経済学などあらゆる分野で使われ，フーリエの理論なくしては世の中は成り立たないかも知れない．石油探索でもしかりで，人工地震の振動をフーリエ解析することにより埋蔵される石油の規模を推測できる．1975 年に石油探査技師の Morlet はフーリエ変換に代わる新しい解析方法を見出した．今日，

ウェーブレット変換と呼ばれる手法である．以降，ウェーブレット解析はフーリエ解析と並んで用いられるようになる．

1980 代の中頃より Meyer, Daubechies らはウェーブレット変換の解析的な研究をはじめ多くの成果を得る．一方，この新しい変換も表現論の視点で解釈することができ，一般にはリー群 G の **2 乗可積分表現**の行列要素の直交性から導かれる．G のユニタリー表現 $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ はその行列要素が G 上で 2 乗可積分であるとき，2 乗可積分表現と呼ばれる．このときある $\psi \in \mathcal{H}$ と定数 $c_\psi > 0$ が存在し，すべての $\phi \in \mathcal{H}$ が

$$\phi = c_\psi^{-1} \int_G \langle \phi, \pi(g)\psi \rangle_{\mathcal{H}} \pi(g)\psi dg$$

と書ける．ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の内積である．例えば G として縮退ハイゼンベルグ群（ハイゼンベルグ群をその中心に含まれる $\mathbb{Z}$ で商をとったもの）をとると自明でない既約ユニタリー表現 π（4, 8 節参照）は 2 乗可積分表現となる．このとき上述の変換はガボール変換となる．また G として 2×2 行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

全体からなる $ax + b$ 群をとると，$L^2(\mathbb{R}_+^\times, \frac{dx}{x})$ に実現される $(\pi_\pm(a,b)f)(x) = e^{\mp 2\pi i bx} f(ax)$ なる表現は 2 乗可積分表現となる．このとき上述の変換は連続型ウェーブレット変換となる．

本稿の詳細については以下の参考文献を参照してほしい．

参考文献

1) 河添　健：『群上の調和解析』，朝倉書店 (2000).
2) 小林俊行・大島利雄：『リー群と表現論』，岩波書店 (2005).
3) 小林俊行・真野元：「$O(p,q)$ の極小表現の反転を与える積分作用素」，数理解析研究所講究録 **1467**「群の表現と調和解析の広がり」(2006).
4) 杉浦光夫：*Unitary Representations and Harmonic Analyisis* (Second Edition), North-Holland/Kodansha (1990).
5) 藤原英徳：『指数型可解リー群のユニタリー表現―軌道の方法』，数学書房 (2010).

（かわぞえ・たけし，慶應義塾大学総合政策学部）

対称空間と表現論

示野 信一

1. はじめに

対称空間上の調和解析や球関数の理論が考えられ始めたのは，20 世紀半ばのことである．筆者が大島利雄先生の下で Helgason の本[2)]を読んでこの分野を勉強し始めてから，28 年になるが，現在に至るまで「対称空間と表現論」に関連した問題に関心を持ち続けている．

対称空間に等長変換群としてはたらくリー群の表現，対称空間の幾何学，対称空間上の関数，微分方程式という代数・幾何・解析が交差し，表現論や調和解析，そして数論や数理物理学などの分野とも関連する豊かな分野である．

調和解析は，任意の関数を基本的な関数の重ね合せで表すことを問題にする．原型は，単位円周上のフーリエ級数と実軸上のフーリエ変換の理論であり，その一般化を問題にする[*1)]．理工系の学部学生は，応用上重要なフーリエ級数やフーリエ変換に触れる機会があるだろう．本稿では，対称空間の基本的な例である 3 次元ユークリッド空間内の単位球面と複素数平面内の単位円板を例にとって，群の作用という幾何学的な観点から対称空間上の調和解析について概説する[*2)]．

*1) 基本的な関数とは，S^1 上のフーリエ級数では e^{inx} $(n \in \mathbb{Z})$，$\mathbb{R}$ 上のフーリエ変換では $e^{i\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ である．

*2) 簡単のため，位相や微分構造，写像の連続性について明示的に述べないことをご勘弁願いたい．

2. 球面上の調和解析

単位球面はコンパクト対称空間の一例である．球面上の調和解析では，球面調和関数がフーリエ級数における指数関数と同じ役割を果たす．

2.1 球面調和関数

単位球面

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

上のラプラシアン Δ の固有関数を**球面調和関数**という．Δ は，$\mathbb{R}^3$ 上のラプラシアン

$$\Delta_{\mathbb{R}^3} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

を

$$x_1 = r \sin\theta \cos\varphi,$$
$$x_2 = r \sin\theta \sin\varphi,$$
$$x_3 = r \cos\theta$$

により定義される $\mathbb{R}^3$ の極座標

$$(r, \theta, \varphi) \quad (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

により変数分離することにより得られる．

$$\Delta_{\mathbb{R}^3} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta,$$
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

S^2 上の測度を

$$dS = \sin\theta\, d\theta d\varphi$$

により定め，この測度に関する S^2 上の L^2 関数全体からなるヒルベルト空間を考える．

$$L^2(S^2) = \left\{ f : \int_{S^2} |f|^2\, dS < \infty \right\}$$

定理 1 (i) Δ の固有値は，

$$-n(n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

である．対応する固有空間 $\mathcal{Y}_n$ は，$\mathbb{R}^3$ 上の n 次斉次調和多項式の S^2 への制限全体からなる $2n+1$ 次元の複素ベクトル空間である[*3]．

(ii) ヒルベルト空間の直交分解

$$L^2(S^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Y}_n$$

が成り立つ．

$\mathcal{Y}_n$ の元は，

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = K_n^m P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (|m| \leqq n)$$

で与えられる．ここで P_n^m は**ルジャンドル陪関数**

$$P_n^m(t) = \frac{1}{2^n n!}(1-t^2)^{m/2} \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}}(t^2-1)^n$$

である．定数倍 K_n^m を

$$K_n^m = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}$$

により定めると，$\{Y_n^m : |m| \leqq n\}$ は $\mathcal{Y}_n$ の正規直交基底をなす．球面調和関数は，太陽のコロナ，水素原子などの解析に応用がある．

2.2 リー群の表現

単位球面 S^2 には，リー群

$$SO(3) = \{g : 3 \times 3 \text{ 実直交行列}, \det g = 1\}$$

が線形変換により作用している．S^2 上の任意の 2 点は $SO(3)$ の元により写り合う．このとき，$SO(3)$ の S^2 への作用は**推移的**であるという．S^2 の点 ${}^t(0,0,1)$ を固定する $G = SO(3)$ の部分群は，

$$K = \{k_\varphi : 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\} \simeq SO(2),$$

$$k_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，

$$S^2 \simeq G/K = SO(3)/SO(2)$$

はコンパクト型のリーマン対称空間である[*4]．S^2 上のラプラシアン Δ および測度 $d\sigma$ は G の作用による座標変換で不変である．したがって，$f \in L^2(S^2)$ に対して

$$T(g)f(x) = f^g(x) = f(g^{-1}x) \quad (g \in G, x \in S^2)$$

と定義すると，$T(g)$ は $L^2(S^2)$ のユニタリな線形変換を定め，$g_1, g_2 \in G$ に対して

$$T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2), \quad T(g_1^{-1}) = T(g_1)^{-1}$$

が成り立つ．T を $L^2(S^2)$ 上の G の**正則表現**という．$T(g)$ は固有空間 $\mathcal{Y}_n$ を不変にする．つまり，$\mathcal{Y}_n$ は G の表現空間になる．これを**固有空間表現**という．$\mathcal{Y}_n$ の部分空間で G 不変なものは $\{0\}$ か $\mathcal{Y}_n$ 自身に限る．つまり Δ の固有空間表現は**既約表現**である．また，異なる固有値に対して固有空間表現は互いに同値でない．したがって，定理 1 (ii) で述べた $L^2(S^2)$ の固有空間への分解は，表現の既約分解を与えており，各既約表現は重複度 1 で現れる[*5]．

$$Y_n^0(\theta, \varphi) = K_n^0 P_n(\cos\theta)$$

は，K 不変な $\mathcal{Y}_n$ の元である[*6]．$\theta = 0$ で値 1 に

*3) $\mathbb{R}^3$ 上の多項式 f が n 次斉次とは，次が成り立つこと：

$$f(rx_1, rx_2, rx_3) = r^n f(x_1, x_2, x_3).$$

*4) 行列 $I_{2,1} = \mathrm{diag}(1,1,-1)$ に対して $\sigma(g) = I_{2,1} g I_{2,1}$ は $\sigma^2 = \mathrm{id}$（G の対合的な自己同型）で，K は $G^\sigma = \{g \in G : \sigma(g) = g\}$ の単位行列を含む連結成分である．このとき，G/K はリーマン対称空間である．

*5) S^2 の場合，$G = SO(3)$ の有限次元既約表現がすべて現れるが，一般のコンパクト対称空間 G/K では，$L^2(G/K)$ の分解に G のすべての有限次元既約表現が現れるわけではない．

*6) $P_n(t) = P_n^0(t)$ はルジャンドル多項式．

なるように正規化した $Y(\theta,\varphi)=P_n(\cos\theta)$ を**帯球関数**という．

■ 3. 単位円板上の調和解析 ■

非コンパクト型のリーマン対称空間の一例である単位円板上の調和解析について概観する．

3.1 単位円板上の固有空間表現

複素数平面の単位円板を

$$D=\{z=x+iy\in\mathbb{C} : |z|<1\}$$

とする．D 上の調和関数は D の境界

$$\partial D=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$$

上の境界値のポアソン積分で表されるという古典的な結果の復習から始めよう．u は D 上の調和関数，つまり

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=0$$

を満たし，$\overline{D}=D\cup\partial D$ 上で連続，$u|_{\partial D}=f$ とすると，

$$u(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}f(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}\quad(z\in D)$$

が成り立つ．今，u は $\overline{D}$ 上の連続関数に伸びるとしたが，積分と境界値の意味を適宜定めると，T 上の任意の関数 f のポアソン積分 u は D 上の調和関数になり，f は u の境界値になっている．D 上の調和関数の境界値は一般に ∂D 上の佐藤超関数になる．∂D 上の佐藤超関数の空間を $\mathcal{B}(\partial D)$ で表す．$\mathcal{B}(\partial D)$ は，実解析関数の空間 $\mathcal{A}(\partial D)$ の双対 $\mathcal{A}'(\partial D)$ と同型である*7)．

単位円板 D 上のポアンカレ計量に関するラプラシアンは，

$$\Delta=\frac{1}{4}(1-x^2-y^2)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

により与えられる．これはユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 上のラプラシアンの関数倍であり，特に D 上の調和関数は $\Delta u=0$ を満たす関数に他ならない．一般に Δ の固有関数の空間を考えよう．$\lambda\in\mathbb{C}$ に対して，

$$\mathcal{A}(D;\mathcal{M}_\lambda)=\left\{u\in\mathcal{A}(D) : \Delta u=\frac{1}{4}(\lambda^2-1)u\right\}$$

とおく．∂D 上の関数 f に対して，古典的なポアソン積分の核関数の複素べきをとって，$\mathcal{P}_\lambda f$ を次の積分により定める．

$$(\mathcal{P}_\lambda f)(z)=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}\right)^{\frac{\lambda+1}{2}}f(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}.$$

$\mathcal{P}_\lambda$ を**ポアソン変換**という．$\mathcal{P}_\lambda f\in\mathcal{A}(D;\mathcal{M}_\lambda)$ であり，さらに次が成り立つ．

定理 2 $\lambda\neq -1, -3, -5, \cdots$ ならば，$\mathcal{P}_\lambda$ は $\mathcal{B}(\partial D)$ から $\mathcal{A}(D;\mathcal{M}_\lambda)$ の上への全単射である．

定理 2 は，1970 年頃に Helgason が証明したものだが，一般の階数の非コンパクト型リーマン対称空間上の不変微分作用素の同時固有空間に対してもこれが一般化できることが予想された（**Helgason–岡本予想**）．この予想は，確定特異点型の境界値問題として定式化され，6 人の日本人，柏原・木幡・岡本・大島・峰村・田中の 1978 年の論文により解決された（詳細は文献 7) 参照）．

3.2 リー群の表現

単位円板 D には，リー群

$$SU(1,1)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix} : \begin{matrix}\alpha,\beta\in\mathbb{C},\\ |\alpha|^2-|\beta|^2=1\end{matrix}\right\}$$

が 1 次分数変換

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix}\cdot z=\frac{\alpha z+\beta}{\bar{\beta}z+\bar{\alpha}}$$

により推移的に作用する．そして，原点を固定する部分群は，

$$K=\left\{k_\theta=\begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix} : \theta\in\mathbb{R}\right\}\simeq SO(2)$$

である．K は $G=SU(1,1)$ の極大コンパクト部分群であり，

$$D\simeq G/K=SU(1,1)/SO(2)$$

*7) $\mathcal{A}(\partial D)\subset C^\infty(\partial D)$ より，$\mathcal{D}'(\partial D)\subset\mathcal{A}'(\partial D)$．$\mathcal{A}$ は実解析関数，$\mathcal{D}'$ はシュワルツ超関数の空間を表す．

は非コンパクト型のリーマン対称空間である*8). D 上の関数は G 上の関数で右からの K の作用で不変なものと見なすことができる.

$G=SU(1,1)$ の部分群 M, A, N を

$$M=\{k_0, k_\pi\},$$
$$A=\left\{a_t=\begin{pmatrix}\cosh t & \sinh t\\ \sinh t & \cosh t\end{pmatrix}\ :\ t\in\mathbb{R}\right\},$$
$$N=\left\{\begin{pmatrix}1+ix & -ix\\ ix & 1-ix\end{pmatrix}\ :\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

により定義する. 任意の $g\in G$ に対して, $g=ka_tn$ となる $k\in K, a_t\in A, n\in N$ が一意的に存在する. つまり**岩澤分解** $G=KAN$ が成り立つ. また, $P=MAN$ は G の部分群になる*9).

単位円板 D の境界 ∂D には, 群 G, K のいずれもが推移的に作用し, 1 を固定する部分群はそれぞれ P, M である. したがって,

$$\partial D\simeq G/P\simeq K/M$$

となる. $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}(G/P;L_\lambda)\\&=\{f\in\mathcal{B}(G)\ :\ f(xma_tn)=e^{t(\lambda-1)}f(x)\\&\qquad(x\in G, m\in M, a_t\in A, n\in N)\}\end{aligned}$$

とおく. $g\in G$ の左からの作用 $f^g(x)=f(g^{-1}x)$ により, $\mathcal{B}(G/P;L_\lambda)$ 上の G の表現が定義される. これを**球主系列表現**という*10).

K 上への制限により,

$$\mathcal{B}(G/P;L_\lambda)\simeq\mathcal{B}(K/M)=\mathcal{B}(\partial D)$$

である. この同一視により, ポアソン変換は,

$$(\mathcal{P}_\lambda f)(x)=\int_0^{2\pi}f(xk_\theta)\frac{d\theta}{2\pi}$$

と書き表すことができる. したがって, $\mathcal{P}_\lambda$ は, **絡作用素**である. すなわち, 次が成り立つ.

$$\mathcal{P}_\lambda(f^g)=(\mathcal{P}_\lambda f)^g\quad(g\in G).$$

ラプラシアン Δ は $G=SU(1,1)$ 不変な微分作用素である. すなわち, 次が成り立つ.

$$\Delta(f^g)=(\Delta f)^g\quad(g\in G).$$

したがって, 固有空間 $\mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_\lambda)$ は, G の表現空間になる (固有空間表現).

定理 2 は, $\lambda\neq-1,-3,-5,\cdots$ のとき, 主系列表現 $\mathcal{B}(G/P;L_\lambda)$ と固有空間表現 $\mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_\lambda)$ が表現として同値であることを示している*11). また,

$$\mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_\lambda)=\mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_{-\lambda})$$

より, 固有空間表現はある主系列表現と同値になっている. $\mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_\lambda)$ が既約であるための必要十分条件は, λ が奇整数でないことである.

3.3 帯球関数

$\lambda\in\mathbb{C}$ に対して,

$$1_\lambda(ka_tn)=e^{(\lambda-1)t}\quad(k\in K, a_t\in A, n\in N)$$

により定義される $1_\lambda\in\mathcal{B}(G/P;L_\lambda)$ のポアソン変換 $\phi_\lambda=\mathcal{P}_\lambda 1_\lambda$ を**帯球関数**と呼ぶ. 帯球関数は,

$$\phi_\lambda(0)=1,\quad\phi_\lambda(k\cdot z)=\phi_\lambda(z)\ (k\in K, z\in H)$$

を満たす.

帯球関数は $G=SU(1,1)$ 上の両側 K 不変な関数とみなすことができる. **カルタン分解** $G=KAK$ より, 帯球関数の値は $a_t\cdot 0=\tanh t$ 上の値により決定される. 定義より,

$$\phi_\lambda(a_t\cdot 0)=\int_0^{2\pi}(\cosh 2t-\sinh 2t\cos\theta)^{-\frac{\lambda+1}{2}}\frac{d\theta}{2\pi}$$

と表すことができる.

単位円板上のラプラシアン Δ を変数分離することにより, 帯球関数の動径成分 $u(t)=\phi_\lambda(a_t\cdot 0)$ は, 微分方程式

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2\coth 2t\frac{du}{dt}=(\lambda^2-1)u$$

の原点で正則な解であることがわかる. 帯球関数

*8) G の対合的自己同型を $\sigma(g)={}^t\bar{g}^{-1}$ により定めると $K=G^\sigma$ であり, G/K はリーマン対称空間である.

*9) P は G の極小放物型部分群である.

*10) ここでは佐藤超関数の空間 $\mathcal{B}$ に値をとったが, $\mathcal{A}$, C^∞, $\mathcal{D}$ 等の関数空間をとることもできる.

*11) ポアソン変換は G の作用と可換な位相同型写像になる.

の動径成分は，上の微分方程式と条件 $u(0)=1$ により特徴づけられる[*12]．言い換えると，帯球関数 ϕ_λ は固有空間 $\mathcal{A}(D;\mathcal{M}_\lambda)$ の中で左 K 不変，原点での値が 1 という条件により特徴づけられるのである．

上の微分方程式の変数変換，あるいは積分表示を用いて，

$$\phi_\lambda(a_t\cdot 0)=F\left(\frac{\lambda+1}{2},\frac{-\lambda+1}{2};1;-\sinh^2 t\right)$$

であることがわかる．ここで，$F(a,b;c;z)$ は**ガウスの超幾何関数**

$$F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}z^n$$

であり，$(a)_n$ は，$(a)_0=1$

$$(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)\quad(n\geqq 1)$$

を表す[*13]．

帯球関数はパラメーター λ と動径方向の変数 t に対する対称性

$$\phi_\lambda=\phi_{-\lambda},$$
$$\phi_\lambda(a_t\cdot 0)=\phi_\lambda(a_{-t}\cdot 0)$$

を持つ．

帯球関数は積分方程式により特徴づけることもできる．$G=SU(1,1)$ 上の関数 ϕ が

$$\int_0^{2\pi}\phi(xk_\theta y)\frac{d\theta}{2\pi}=\phi(x)\phi(y)\quad(x,\,y\in G)$$

を満たすことと，ある $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して $\phi=\phi_\lambda$ であることは同値である．

帯球関数の無限遠における漸近挙動について，積分表示またはガウスの超幾何関数の接続公式を用いて，次が示される．

命題 1　$\mathrm{Re}\,\lambda>0$ のとき，

$$\lim_{t\to\infty}e^{(-\lambda+1)t}\phi_\lambda(a_t)=\boldsymbol{c}(\lambda),$$

$$\boldsymbol{c}(\lambda)=\pi^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}.$$

ここで Γ はガンマ関数を表す．$\boldsymbol{c}(\lambda)$ を Harish-Chandra の **$\boldsymbol{c}$ 関数**という．

3.4 フーリェ変換

単位円板 D 上の不変測度 $d\mu(z)$ は，座標

$$z=x+iy=k_\theta a_t\cdot 0$$

について，

$$d\mu(z)=(1-x^2-y^2)^{-2}dxdy=\sinh 2t\,d\theta dt$$

により与えられる．f を単位円板 D 上の K 不変な関数とするとき，その**球フーリェ変換** $\tilde{f}(\lambda)$ を帯球関数を核関数とする積分変換

$$\tilde{f}(\lambda)=\int_D f(z)\phi_{-\lambda}(z)d\mu(z)$$

により定義する．被積分関数は動径方向の値だけで決まり，

$$\tilde{f}(\lambda)=4\pi\int_0^\infty f(\tanh t)\phi_{-\lambda}(\tanh t)\sinh 2t\,dt$$

と表すことができる[*14]．

定理 3　球フーリェ変換の逆変換公式は，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\tilde{f}(is)\phi_{is}(z)|\boldsymbol{c}(is)|^{-2}ds$$

により与えられる．また，プランシュレルの定理

$$\int_D|f(z)|^2d\mu(z)=\frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{R}}|\tilde{f}(is)|^2|\boldsymbol{c}(is)|^{-2}ds$$

が成り立つ．

定理 3 は，$\mathbb{R}$ 上の L^2 フーリェ解析の類似と見なすことができる．

単位円板上の任意の関数 f の Helgason 変換を

$$\mathcal{H}f(\lambda,e^{i\theta})=\int_D\left(\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}\right)^{\frac{-\lambda+1}{2}}f(z)d\mu(z)$$

により定義する[*15]．K 不変な関数の Helgason

*12）2 階の微分方程式の解空間の次元は 2 次元だが，もう一方の独立解は原点で正則でない．

*13）ルジャンドル関数により，$\phi_\lambda(\tanh t)=P_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cosh 2t)$ と表すこともできる．

*14）単位円板上の球フーリェ変換 $\tilde{f}(\lambda)$ はルジャンドル関数を核関数とする Mehler–Fock 変換に他ならない．

*15）核関数として，ポアソン変換の核関数が現れている．

変換は λ だけに依存する関数であり，球フーリエ変換に一致する．

定理 4 Helgason 変換に対して，逆変換公式

$$f(z) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{P}_{is}\mathcal{H}f)(z)\, s\tanh\left(\frac{\pi s}{2}\right) ds,$$

およびプランシュレルの定理が成り立つ．

定理 4 は，$L^2(D)$ 上の $G = SU(1,1)$ の表現が，λ が純虚数である球主系列表現の直積分に分解されることを示している．

4. 一般の場合

上で見た単位球面と単位円板は，それぞれコンパクト型，非コンパクト型のリーマン対称空間の例だが，いずれも階数が 1 の対称空間である．これは，微分作用素がラプラシアン 1 個，変数分離により得られる特殊関数が 1 変数 (S^2 の場合は θ, D の場合は t) の関数であることに対応している．

階数が r のリーマン対称空間 G/K 上の左 G 不変な微分作用素は，r 個の代数的独立な元により生成される可換な代数をなす．例えば，$SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$, $SU(n)/SO(n)$ は，それぞれ非コンパクト型，コンパクト型のリーマン対称空間で，階数は $n-1$ である*16)．不変微分作用素の同時固有空間は，半単純リー群 G の表現空間になり，それぞれの固有空間は左 K 不変で原点での値が 1 の関数 (帯球関数) をただ 1 つ含む．

G/K がコンパクト型のリーマン対称空間のとき，各固有空間は G の有限次元既約表現であり，$L^2(G/K)$ はそれらのヒルベルト直和に分解する．異なる固有値のパラメーターに対する表現は互いに同値ではなく，したがって，$L^2(G/K)$ に現れる各既約表現の重複度は 1 である．

G/K が非コンパクト型のリーマン対称空間のとき，G の極小放物型部分群 P があって，任意の同時固有関数は $G/P \simeq K/M$ 上の関数のポアソン積分で表される (Helgason–岡本予想)．Harish-Chandra の $\boldsymbol{c}$ 関数が具体的に与えられて，球フーリエ変換，Helgason 変換のプランシュレル測度および固有空間表現の既約性条件が $\boldsymbol{c}$ 関数を用いて表される．$L^2(G/K)$ は，ユニタリな球主系列表現の重複度 1 の直積分に分解される．特に分解には，連続スペクトルのみが現れる．

高階の場合，G/P よりも退化した G/K の境界 G/P' ($P \subsetneq P' \subsetneq G$) が現れる実現があり，$G/P'$ からのポアソン変換の単射性や像に関する研究がなされている．

高階の場合，帯球関数の動径成分について，対称空間からくる場合よりもパラメーターを拡張した多変数の直交多項式や超幾何関数が研究されている．

リーマン対称空間の場合に述べてきたが，計量が定値とは限らない対称空間上の調和解析，表現論についても研究がなされている*17)．

*16) G, K として現れる群の定義は以下の通り．$SL(n,\mathbb{R})$ は行列式が 1 の n 次実正方行列の全体，$SO(n)$ は行列式が 1 の n 次実直交行列全体，$SU(n)$ は行列式が 1 の n 次ユニタリ行列全体である．

*17) 単位円板の項で述べた記号で $SU(1,1)/A$ はリーマンでない対称空間の例である．また，リー群 G 自身を $G\times G$ が両側から作用する対称空間とみなすことができるので，対称空間上の調和解析の研究は，$L^2(G)$ を一例として含んでいる．

参考文献

1) H. Dym, H.P. McKean: *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, 1972.
2) S. Helgason: *Groups and Geometric Analysis*, American Mathematical Society, 2000.
3) 小林俊行，大島利雄：『リー群と表現論』，岩波書店，2005.
4) 日本数学会 編集：『岩波 数学辞典 第 4 版』，岩波書店，2007.
5) 岡本清郷：『等質空間上の解析学—リー群論的方法による序説』，紀伊國屋書店，1980.
6) 岡本清郷：『フーリエ解析の展望』，朝倉書店，1997.
7) H. Schlichtkrull: *Hyperfunctions and Harmonic Analysis on Symmetric Spaces*, Birkhäuser, 1984.
8) A. Terras: *Harmonic Analysis on Symmetric Spaces and Applications I*, Springer, 1985.

（しめの・のぶかず，関西学院大学理工学部）

不変式と表現論

落合　啓之

1. 回転不変な式

2 変数の多項式 $f(x,y)$ が回転で不変であるとしよう．すなわち，平面上の点 (x,y) を原点を中心に回転して得られる点を (x',y') としたとき，$f(x,y)=f(x',y')$ が成り立つとしよう．このような多項式を回転に対する**不変式**という．

すぐにわかることだが，$f(x,y)=x^2+y^2$ は回転に対する不変式である．これは回転によって，2 点間の距離が変わらない

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x'^2+y'^2} \tag{1}$$

という事実の直接の帰結である．いや，その事実と同値だとも言える．この不変式 x^2+y^2 を**典型不変式**（typical invariant）と呼ぶ．

では，回転不変式はこの典型不変式の他にもあるだろうか？ 少し考えれば，たくさんあることがわかる．これを定数倍した $3(x^2+y^2)$ もそうだし，あるいはべき乗した $(x^2+y^2)^5$ もそうである．この 2 つの演算を組み合わせると，典型不変式の多項式で書き表せるものもすべて不変式であることがわかる．

では，回転不変式はこのように典型不変式の多項式で書き表されるものですべてであろうか？ いまの場合，これは正しい．

定理 1　勝手な回転不変式 f は x^2+y^2 の多項式で表せる．すなわち，ある 1 変数の多項式 $g(t)$ が存在して，$t=x^2+y^2$ を代入した式

$$g(x^2+y^2)=f(x,y) \tag{2}$$

と書ける．

これが不変式の**第一基本定理**（の易しいバージョン）である．

2. 1 点から 2 点へ

では，点の数を 1 つから 2 つに増やしてみよう．すなわち，$f(x,y,\xi,\eta)$ という 4 変数の多項式で，(x,y), (ξ,η) を同時に回転して (x',y'), (ξ',η') となったときに，$f(x',y',\xi',\eta')=f(x,y,\xi,\eta)$ となるような式を考える．x^2+y^2 や $\xi^2+\eta^2$ が回転不変式になることは前節で既知だが，$x\xi+y\eta$ も不変式になることに気がつくであろうか？

これらの典型不変式は，幾何的に理解することができる．$\boldsymbol{x}=(x,y)$, $\boldsymbol{\xi}=(\xi,\eta)$ とベクトル記号を用いると，2 次元実線形空間の標準内積は

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle = x\xi+y\eta \tag{3}$$

に他ならない．同様に

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle = x^2+y^2, \tag{4}$$

$$\langle \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle = \xi^2+\eta^2 \tag{5}$$

と内積を使って表示できる．したがって，不変性は，回転移動によって長さや角度が変わらないことの反映である．

では，回転不変式はこれらの 3 つの典型不変式

の多項式として書き表せるであろうか？ 答えは，Noである．

3. 類別と商集合

種明かしをする前に，いったん第1節の設定に戻る．平面上の点を原点を中心とする回転で動かすと原点を中心とする円を描く（図1）．これを（群の作用に関する）**軌道**という．多項式 f が回転不変式であるとは，各軌道上での値が一定である，ということに他ならない．したがって，不変式は軌道の集まり（**商集合**）上の関数と見なすこともできる．

典型不変式 x^2+y^2 は，同一円周上で値が等しい，という性質だけでなく，逆に，異なる円周上の値は異なる，という著しい性質も持っている．したがって，勝手な不変な関数 f に対して，関係(2)を満たすような g という関数が存在する．f が不変式，すなわち，不変な多項式のときに，そういう g が多項式に取れるかどうかを考察する必要があるが，これは別の議論ですぐに導かれる（6節を参照）．

では，第2節の設定に戻ってみよう．座標を $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\xi}$ とする平面上の2点をA, Bとし，原点をOとする．3点O, A, Bを頂点とする三角形△OABの合同変換による類別を考える．2つの三角形△OABと△OA′B′が合同であるためには，二辺挟角相等，すなわち，OA = OA′, OB = OB′, ∠AOB = ∠A′OB′ が成り立つことが必要十分である．すなわち，3つの典型不変式(3), (4), (5)の値が一致すれば，ある合同変換によって，2点A, BはA′, B′に移せることになる．したがって，合同変換による不変式 f は，3つの典型不変式で表せることになる．

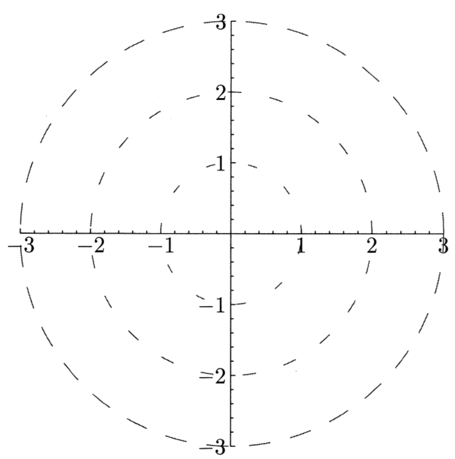


図1 平面上の回転の軌道．

$$f(x,y,\xi,\eta)=g(x^2+y^2,\xi^2+\eta^2,x\xi+y\eta). \quad (6)$$

関数 g が（3変数の）多項式になるかどうかは，吟味を要することであるが，正しい．

不変式たちがこのような性質，すなわち，異なる軌道をその値で区別できるような不変式が存在する，という性質を持つ場合，軌道の集合は不変式の値の集合で記述される．つまり，商集合の座標系として，不変式が取れる．いまの例では，3つの典型不変式

$$\begin{aligned} p &= x^2+y^2, \\ q &= x\xi+y\eta, \\ r &= \xi^2+\eta^2 \end{aligned} \quad (7)$$

が，原点を保つ合同変換による平面上の2点の商集合の座標関数に取れるのである．シュワルツの不等式より，$(p,q,r)\in\mathbb{R}^3$ の値は任意ではなく，

$$p\geq 0, \quad r\geq 0, \quad pr-q^2\geq 0 \quad (8)$$

の条件を満たす．逆に $(p,q,r)\in\mathbb{R}^3$ がこれらの不等式条件(8)を満たすとき，式(7)を満たす $(x,y,\xi,\eta)\in\mathbb{R}^4$ が存在する．したがって，商集合は，条件(8)を満たす $(p,q,r)\in\mathbb{R}^3$ の集合と同一視することができる．記号的に書けば，

$$\mathbb{R}^4/O(2)\cong\{(p,q,r)\in\mathbb{R}^3 \mid \text{条件 (8)}\}$$

である．ここで $O(2)$ は2次の直交群である．なお，条件(8)は，実対称行列 $\begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$ が半正定値であるという条件と一致している．これは偶然ではない．

4. 向き付けと行列式

三角形に限らず，合同な図形の不変量の筆頭（代

表格）は面積・体積である．△OAB の面積を S と書くと，

$$2S = |x\eta - y\xi|$$

である．したがって，$|x\eta - y\xi|$ は合同変換によって不変な関数であるが，残念ながら多項式ではない．これを 2 乗した $(x\eta - y\xi)^2$ は確かに多項式であり，合同変換による不変式である．したがって，前節で紹介した合同変換に関する第一基本定理によって，3 つの典型不変式で書き表せるはずである．具体的には，

$$(x\eta - y\xi)^2 = (x^2 + y^2)(\xi^2 + \eta^2) - (x\xi + y\eta)^2 \tag{9}$$

となる．これはラグランジュの等式の特別な場合，すなわち，コーシー・シュワルツの不等式の剰余項の表示と考えることもできる．また，移項して

$$(x^2 + y^2)(\xi^2 + \eta^2) = (x\eta - y\xi)^2 + (x\xi + y\eta)^2 \tag{10}$$

と書けば，2 つの複素数 $(x+iy)$ と $(\xi + i\eta)$ の積の絶対値の 2 乗を 2 通りに計算した等式とも読める．このような典型不変式の間に成立する関係式を列挙することを，不変式論の**第二基本定理**という．これは一般の不変式を典型不変式の多項式で表すときの，表示の一意性がどのぐらい崩れているかを表している．いまの場合は，これらの 4 つの式の間に成立する関係式は本質的にこの 1 つの関係式 (10) で尽きる，ということが知られている．

さて，2 乗する前の式に戻ろう．多項式 $x\eta - y\xi$ も合同変換による不変式である，と言いたいところだが，この式は合同変換による不変式ではない．この事実も図形的に理解してみよう．二等辺三角形の底角が等しいという証明で現れるような合同な三角形 △OAB, △OA′B′ を考える（図 2）．

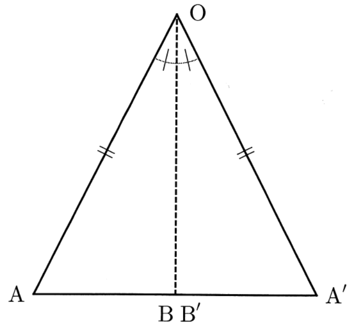


図 2　裏返しで移り合う図形．

この 2 つの三角形のように裏返しで移り合う三角形は，一般には回転だけでは移り合えない．裏返しの関係にある 2 つの三角形を識別できるセンサーの役割をする量は何だろうか？ 我々はその答えが**向き付け**であるということを中学生時代からの経験で知っているが，答えがわからない場合，そのような識別子は不変式を探す（構成する）手がかりとなる．例えば，判別式はその名前からして判別の役割をする重要な不変式である．いまの式に戻ると，扱っている式 $x\eta - y\xi$ は，頂点 O, A, B が反時計回りのときは $2S$，時計回りのときは $-2S$ となる．つまり，「符号付き面積」を表していると解釈することができる．面積や向きは回転によって変わらないから，この符号付き面積も不変に保たれる．したがって，この式は回転に関する不変式であり，しかも合同変換に関する不変式ではない．

向き付けに伴う符号因子が示唆するように，この式の正体は**行列式**である．実際，2 点の座標を並べて作った行列の行列式が

$$\det \begin{pmatrix} x & \xi \\ y & \eta \end{pmatrix} = x\eta - y\xi$$

を与える．行列式の公式

$$\det(XY) = \det(X)\det(Y)$$

から，$x\eta - y\xi$ が回転に関する不変式であることは見やすい．行列式は典型的な不変式であるが，向き付け的要素を含んでいるため，決して易しくはない．また，変数の個数が多いのも行列式の特徴である．

当初の問題に戻ると，平面上の 2 点の回転に関する不変式はこれら 4 つの典型不変式

$$x^2 + y^2,\quad \xi^2 + \eta^2,\quad x\xi + y\eta,\quad x\eta - y\xi$$

の多項式で書き表せることが知られている．これ

表 1　合同変換群とその部分群.

名称	変換の種類	半直積表示
合同変換群	回転, 裏返し, 平行移動	$O(2) \ltimes \mathbb{R}^2$
運動群	回転と平行移動	$SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$
直交群	回転と裏返し	$O(2)$
特殊直交群	回転	$SO(2)$

がいまの場合の不変式論の第一基本定理である. この結果は次元や個数を増やしても成立しており,

定理 2 **(i)** $\mathbb{R}^n$ の m 点の $O(n)$ 不変式は, 勝手な 2 点の内積たちで生成される.
(ii) $\mathbb{R}^n$ の m 点の $SO(n)$ 不変式は, 勝手な 2 点の内積たち, および, 勝手な n 点の行列式で生成される.

第 1 節では $n = 2, m = 1$ の場合を, 第 2 節および第 4 節では $n = 2, m = 2$ の (i) および (ii) の場合をそれぞれ扱った (表 1 参照). $m = n$ とすれば, n 次元空間における n 単体の運動群による同値類や合同類を考えていることになる.

5. 群と不変式

いま見たように, 同じ対象の集合でも, 変換の種類を変更する (回転, 合同) と, 移り合える・移り合えない対象は変わるし, 不変式も増えたり減ったりする. クラインの**エルランゲン・プログラム**によれば, 対象と**群**を与えるごとに幾何が決まるのである. 不変式論は, 環と群を与えるごとに展開できる. 環を有限次元線形空間上の多項式環に限り, 群の環への作用を有限次元線形表現から誘導されるものに限っても, 古典的不変式論は含まれるし, 幾何学的不変式論 (マンフォード) の枠組みの主要な例を与えることができる.

ここまでの内容を, 少し言葉を使って説明してみよう. 群 G が環 R に作用しているとする. すなわち, $g \in G$ に対して, 環 R の自己同型 $\rho(g)$ が存在して, $\rho(g_1)\rho(g_2) = \rho(g_1 g_2)$ が成り立っているとする. G で不変な R の元の全体を

$$R^G = \{f \in R \mid \rho(g)f = f\ (\forall g \in G)\}$$

表 2　演算と代数系.

名称	演算の種類
アーベル群	足し算引き算
環	足し算引き算, かけ算
線形空間	足し算引き算, スカラー倍
代数	足し算引き算, かけ算, スカラー倍
体	足し算引き算, かけ算割り算

と定める. これは R の部分環になる. 不変式論は, R^G の環としての性質, 例えば, 環としての生成系, 関係式などを調べることを扱う. 例えば, 環として有限生成になるかという問題は, 不変式論の古典的理論における大問題であった (ヒルベルト). 群が**簡約** (reductive) に作用するときに不変式論は豊富な結果を持つが, それを外れると荒野が広がっている[7].

R が環であり線形空間でもあるとき**代数**という (表 2 参照). 有限次元線形空間 V 上の群 G の線形表現を π とする. すなわち,

$$\pi : G \to GL(V) \qquad (11)$$

という群準同型が与えられているとする. このとき V 上の多項式環 R には自然に群 G が作用する:

$$(\rho(g)f)(v) = f(\pi(g^{-1})v) \qquad (g \in G, f \in R, v \in V).$$

R 自身も G の表現になり, R^G はその自明表現に属する **等方成分** (isotypic component) と呼ばれるものに他ならない.

不変式論における表現論の登場の機会を大雑把にまとめると

(a) 不変式論を展開する設定 (π, V) を提供する,
(b) 不変式は自明表現に属する,

となる. 代数 R や部分代数 R^G は無限次元であるが, 多項式の次数を考えることで, 多項式環 R やその部分代数 R^G は有限次元部分表現としての直和に分解される. したがって, この時点では無限次元表現に関する諸問題は生じない.

6. 制限定理

第 1 節の設定に戻る．$(x,0)$ と $(-x,0)$ は回転で移り合えるので，$f(x,y)$ が回転不変式であれば，$f(x,0)=f(-x,0)$ となる．したがって，回転不変式 f を x 軸に制限すると，偶関数の多項式が得られる．記号的に書けば，

$$\mathbb{R}[x,y]^{O(2)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[x]^{O(1)} \tag{12}$$

という写像が得られることになる．変数の代入操作は多項式の和を和に，積を積に写すので，制限写像は代数準同型である．しかもいまの場合，全単射であることがわかるので，代数同型が，制限写像によって誘導されることになる．これは，**シュバレーの制限定理**の特別な場合である．

7. 量子化

次に，偏微分の**連鎖律**（chain rule）を思い出してみよう．座標変換を具体的に

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書く．このとき，連鎖律によって，

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'} = a\frac{\partial}{\partial x'} + c\frac{\partial}{\partial y'},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = b\frac{\partial}{\partial x'} + d\frac{\partial}{\partial y'}$$

となる．これを行列形で書き，さらに逆に解くと，

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

となる．これがベクトル場の変換公式である．転置の逆行列なので双対線形空間への作用である．特に，座標変換として合同変換を考える場合，合同変換は直交変換なので

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

であり，(x,y) への作用と (∂_x,∂_y) への作用は一致している．

以上の準備の下で，2 変数の多項式係数の線形偏微分作用素 $P(x,y,\partial_x,\partial_y)$ が合同変換不変であるための条件を考えよう．2 節の内容より，

$$Q = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle = x^2+y^2, \tag{13}$$
$$\Delta = \langle \boldsymbol{\partial},\boldsymbol{\partial}\rangle = \partial_x^2+\partial_y^2, \tag{14}$$
$$E = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\partial}\rangle = x\partial_x+y\partial_y \tag{15}$$

が不変な微分作用素であることが推察できるだろう．それぞれ，2 次形式，ラプラス作用素，オイラー作用素という由緒正しい作用素である．不変微分作用素環はこれらの 3 つの典型不変微分作用素の生成する代数に一致する（第一基本定理）．ここで，多項式環は可換環であったが，微分作用素環は非可換環であるという違いがある．不変微分作用素環も非可換である．すなわち，交換子を

$$[A,B] = AB-BA \tag{16}$$

と定義し，計算すると

$$[E,Q] = 2Q, \tag{17}$$
$$[E,\Delta] = -2\Delta, \tag{18}$$
$$[\Delta,Q] = 4E+4 \tag{19}$$

となる．ここで

$$H=E+1,\quad X=Q/2,\quad Y=-\Delta/2 \tag{20}$$

と定めると，これら 3 つの作用素は，

$$\begin{aligned} &[H,X]=2X,\\ &[H,Y]=-2Y,\\ &[X,Y]=H \end{aligned} \tag{21}$$

という関係式を満たす．これは，**$\mathfrak{sl}_2$ 関係式**と呼ばれる関係式であり[6)]，3 つの行列

$$H=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

もこれらの関係式 (21) を満たす．リー環 $\mathfrak{sl}_2$ は

$$\mathfrak{sl}_2 = \{A\in M(2,\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A)=0\} \tag{22}$$

に $[\cdot,\cdot]$ による演算を考えたものであり，実 3 次元線形空間として H,X,Y を基底に持つ．リー環 $\mathfrak{sl}_2$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{sl}_2)$ の普遍性の定義から，

$$U(\mathfrak{sl}_2) \to \mathbb{R}[x,y,\partial_x,\partial_y]^{O(2)} \tag{23}$$

という環準同型が存在する．いまの場合，それが

全単射，すなわち環同型を与えることが知られている．したがって，2次直交群の自然表現に関する不変微分作用素環が，$\mathfrak{sl}_2$ という新たな対称性を獲得したことがわかる．例えば，**カペリ恒等式**[2)]

$$Q\Delta - E^2 = (x\partial_y - y\partial_x)^2 \tag{24}$$

は，同型 (23) の左辺と右辺の特別な元（**カシミール元**）の間の具体的な対応を与えていると解釈できる．このように，不変式論における表現論の登場の機会として，5節に挙げた (a), (b) に加えて，

(c) 不変式環が新たな対称性を持つ

という場合がある．非可換の不変式論の一つの問題提起として，B. Kostant, A.G. Noël の $U(\mathfrak{g})^K$ の研究を付記しておく．

ここでの議論は，2変数 (x, y) を n 変数 $(x_1, \ldots, x_n)$ に取り替えて通用し，$\mathfrak{sl}_2 \times O(n)$ **双対性**を与える．n が奇数の場合は，$SL(2, \mathbb{R})$ の2重被覆群の表現が現れる．特に $n=1$ の場合は，**振動表現** (oscillator) あるいは，Segal, Shale, Weil の名を冠して呼ばれることもある特別な表現である．

8. 不変式論を超えて

3節の例で見たような，ものの集まりを群の作用で類別した商集合を**モジュライ**空間ともいう．一般に，空間を理解するにはその空間の上に棲む関数環を調べるのが常套手段である（ゲルファント・ナイマーク，グロタンディク）．不変式論はモジュライ理論に隷属してはいないものの，近年はモジュライ理論からの問題意識や発展を目にすることが多い[7)]．

一方で，分類する，すなわち，類別した商集合を素朴に記述する立場は，各軌道上での定数となる関数，すなわち，商集合上の（ディリクレの意味での）関数全体のなす環を考えることに相当する．これはこれで大切な考え方なのであるが，類別されるものの近さ（位相）を無視しているという難点がある．

モジュライ空間の考え方は，正確に構成員を把握することを積極的に放棄し，安定 (stable) でない対象を取り除いたり，適当な付加構造を入れて2重以上にカウントしたりして，商集合全体の整合性を優先する社会的な立場を取っている．不変式から観測できないような差異は見ないのである．

この両者のいわば中間にあるのが，**不変超関数**である．ディラックのデルタ関数に代表されるように，超関数は低次元の集合に台を持つことができるため，次元の低い集合や特異な集合も検出することができる．その一方で，元の集合の位相構造（つながりぐあい）も反映することができる．超関数は多項式と異なり積構造を持たないので，環の不変式論からは外れるが，商空間の局所的な特異性を含んだ情報を関数空間から検出する役割を演じることができる．例えば，$V = \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ へ $G = GL(n, \mathbb{R})$ が作用するとき，V の部分集合 $\mathbb{R}^n \oplus \{0\}$ は G で保たれるが，この軌道の閉包に台を持つ不変超関数は存在しない ($n \geq 3$)．この事実は，GL_n/GL_{n-1} の無重複度性をゲルファント・カジダン原理で証明する際の鍵となるステップを与えている (van Dijk)．

9. この先を読み進めるために

この文章は，数学辞典[5)]の項目**117**（群作用と不変式）の導入を意識し，事例を交えて書いた．まずはその短い文を眺めていただき，その先は梅田亨[1)], R. Howe[6)]などの一連の著作へ向かわれたい．

参考文献

1) 梅田亨：不変式論・入門・以前 == 第一基本定理と記号的方法，所収「現代の母函数」(1991), 71–188.
2) 梅田亨：「100 年目の Capelli Identity」，数学 **46** (1994), 206–227.
3) 落合啓之：「特殊関数と表現論」，数学セミナー，2007年3月号，18–23, 日本評論社.
4) 小林俊行，大島利雄：『リー群と表現論』，岩波書店 (2005).
5) 『岩波数学辞典』，第4版，(2007), 岩波書店,
6) R. Howe and E.C. Tan: *Non-Abelian Harmonic Analysis, Applications of* $SL(2, \mathbb{R})$, Universitext, Springer (1992).
7) 向井茂：『モジュライ理論 I, II』，岩波書店 (2008).

（おちあい・ひろゆき，九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）

ヤング図形から表現論をさぐる

寺田　至

ヤング図形（Young diagram）とは図1のように正方形の板を左を揃えて各行に何枚か敷き詰めたような図のことで，各行の枚数を上の行から順に並べた数列をその**形**（shape）という．図1のヤング図形の形は $(3,2,2,1)$ である．ヤング図形の形はこのように広義単調減少でなくてはならない．広義単調減少な自然数の有限数列を**分割**（partition）という．ここでは分割を λ,μ などの文字で表す．

図2のようにヤング図形の各正方形に自然数を書き込んだものを**ヤング盤**（Young tableau）という．以下自然数 n を1つ決め，ヤング図形の行数は n 以下，書き込める自然数は $1\sim n$ としておく．図2はヤング盤の中でも**半標準盤**（semistandard tableau）と呼ばれるものの例である（n は例えば5）．半標準盤では，各行は右方向に広義に増加，各列は下方向に狭義に増加しなくてはならない．盤の枠に当たるヤング図形の形を盤の**形**（shape）という．盤に書き込んだ $1\sim n$ の各数の個数を並べた列 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ を盤の**ウェイト**（weight），変数 $x_1\sim x_n$ の単項式 $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ を**ウェイト単項式**（weight monomial）という．図2の盤の形は $(3,2,2,1)$，ウェイトは $(1,3,0,2,2)$，ウェイト単項式は $x_1x_2^3x_4^2x_5^2$ である．形が λ の半標準盤全体を $\mathcal{SS}(\lambda)$，そのうちウェイトが α のもの全体を $\mathcal{SS}(\lambda,\alpha)$ とおこう．

一方，可逆な n 次複素正方行列全体が行列の乗法に関してなす群を $GL(n,\mathbb{C})$ と書く．$GL(n,\mathbb{C})$ の有限次元表現とは，有限次元の複素ベクトル空間 V と，群準同型 $\rho: GL(n,\mathbb{C})\to GL(V)$ を指定したものである（$GL(V)$ は V の可逆な線型変換全体が写像の合成に関してなす群）．それが**多項式表現**であるとは，V の基底を決めて $\rho(g)$ を行列表示すると，その各成分が行列 g の成分の多項式で表されることをいう．$V=\mathbb{C}^n$，$\rho=\mathrm{id}$ は最も基本的なもので，**自然表現**または**ベクトル表現**と呼ばれる．多項式表現の直和やテンソル積も多項式表現である．多項式条件は基底のとりかたによらないから，多項式表現の部分表現も多項式表現である．$GL(n,\mathbb{C})$ の多項式表現は完全可約であることも知られている．例えば自然表現の2重テンソル積 $V=\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n$，$\rho: g\mapsto g\otimes g$ は，対称テンソル全体と（$n\geqq 2$ なら）交代テンソル全体を表現空間とする2つの既約な多項式表現（2階対称テンソル表現および2階交代テンソル表現）の直和に分解する．

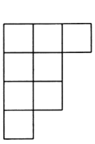


図1

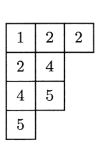


図2

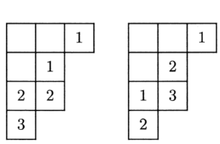


図3

さて，$GL(n,\mathbb{C})$ の既約な多項式表現は，実は項数 n 以下の分割，言い換えれば行数が n 以下のヤング図形によって分類される．分割 λ に対応する既約な多項式表現を ρ_λ で表し，単に λ に対応する既約表現と呼ぼう．この対応の原理の説明は略すが，例えば自然表現，2階対称テンソル表現，2階交代テンソル表現はそれぞれ $\rho_{(1)}$，$\rho_{(2)}$，$\rho_{(1,1)}$ と表される．

表現空間の次元は表現の基本的な属性の1つである．$GL(n,\mathbb{C})$ の多項式表現では，次元をさらに詳しく分けていうことができる．非負整数 n 個の組 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ に対し，V の元 v のうち，任意の可逆な対角行列 t に対し $\rho(t)\cdot v=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}v$（$x_1,x_2,\dots,x_n$ は t の対角成分）をみたすもの全体は部分空間をなす．これを V_α とおこう．$V_\alpha\neq\{0\}$ となる α は有限個しかなく，V は $\bigoplus_\alpha V_\alpha$ と直和分解される．特に V の適当な基底をとると，すべての可逆対角行列 t に対する $\rho(t)$ が一斉に対角行列で表示される．このとき $\dim V=\sum_\alpha \dim V_\alpha$ であり，また $\operatorname{trace}\rho(t)=\sum_\alpha(\dim V_\alpha)x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ となる．この $x_1,x_2,\dots,x_n$ の関数を χ_ρ で表し，表現 ρ の**指標**（character）という．自然表現，2階対称テンソル表

現，2 階交代テンソル表現の指標はそれぞれ $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{1 \leqq i \leqq j \leqq n} x_i x_j$, $\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} x_i x_j$ である．

ここで V として既約表現 ρ_λ の表現空間をとると，$\dim V_\alpha = \#\mathcal{SS}(\lambda, \alpha)$（# は元の個数）であることが知られている．従って $\mathcal{SS}(\lambda)$ の元すべてのウェイト単項式の和は，既約表現 ρ_λ の指標 χ_{ρ_λ} になる．簡単のためこれを χ_λ と書く．これを **Schur 多項式**ともいう．例えば $\mathcal{SS}((1)) = \{ \boxed{i} \mid 1 \leqq i \leqq n \}$, $\mathcal{SS}((2)) = \{ \boxed{i \mid j} \mid 1 \leqq i \leqq j \leqq n \}$, $\mathcal{SS}((1,1)) = \{ \begin{array}{|c|}\hline i \\ \hline j \\ \hline \end{array} \mid 1 \leqq i < j \leqq n \}$ であるから，そのウェイト単項式の和はそれぞれ $\sum_i x_i$, $\sum_{i \leqq j} x_i x_j$, $\sum_{i<j} x_i x_j$ となり，上の話と合う．個数が次元と合うだけでなく，各 V_α に $\mathcal{SS}(\lambda, \alpha)$ の各元に対応する基底をとり，それを併せて V の基底をとる方法も知られている．

異なる分割 $\lambda, \mu, \ldots$ に対し，$\chi_\lambda, \chi_\mu, \ldots$ は 1 次独立になる．表現の直和の指標に関し $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$ が成り立つから，多項式表現の完全可約性と合わせると，多項式表現 ρ が与えられたとき，何らかの方法で指標 χ_ρ を $\sum_\lambda m_\lambda \chi_\lambda$ と展開する式がわかれば，ρ は $\bigoplus_\lambda \rho_\lambda^{\oplus m_\lambda}$ と既約分解することがわかる．$\rho_\lambda^{\oplus m_\lambda}$ は，同じ既約表現 ρ_λ の m_λ 個の直和を表す．

λ を 1 つ与えると，指標の等式として $\chi_\lambda \cdot \chi_{(1)} = \sum_{\lambda \dot{\subset} \mu} \chi_\mu$ が成り立つ．ただし $\lambda \dot{\subset} \mu$ は，分割 μ のヤング図形が λ のヤング図形に 1 つ箱を付け加えて得られることを表す．上のことより，$\rho_\lambda \otimes \rho_{(1)}$ の既約分解は $\bigoplus_{\lambda \dot{\subset} \mu} \rho_\mu$ の形であるとわかる．この指標の等式を示す 1 つの方法は **Schensted 挿入**（insertion）という半標準盤の間の全単射を用いることである．Schensted 挿入は，形が λ の半標準盤 T と，1 から n までの自然数 i とから，T の数字をある規則でずらして 1 行目に i を取り込み，λ のヤング図形に箱を 1 つ付け加えた形の半標準盤を作る方法で，できた半標準盤を $T \leftarrow i$ と書く．T と i の組に $T \leftarrow i$ を対応させる写像は，$\mathcal{SS}(\lambda) \times \{1, 2, \ldots, n\}$ から $\coprod_{\lambda \dot{\subset} \mu} \mathcal{SS}(\mu)$ への全単射になる．$T \leftarrow i$ は，T の文字を全部含み，さらに i を 1 個多く含むので，($T \leftarrow i$ のウェイト単項式) = (T のウェイト単項式)$\cdot x_i$ となる．これを T と i の組すべてに関して足し合わせると，本段落冒頭の指標の等式になる．

その後 Knuth, Lascoux, Schützenberger, Thomas などによって Schensted 挿入に基づく全単射（初めて述べた Robinson の名も冠して **Robinson–Schensted 対応**，略して RS 対応）が研究され，これを用いて **Littlewood–Richardson rule** のような複雑なものも証明されることが明らかにされた．Littlewood–Richardson rule とは，テンソル積 $\rho_\mu \otimes \rho_\nu$ の既約分解の中の ρ_λ の重複度が，形が λ/μ，ウェイトが ν の **Littlewood–Richardson 盤**，略して LR 盤の個数に等しいという定理である．LR 盤もヤング盤の親類だが，数を書き込む部分は λ のヤング図形から μ のヤング図形を除いた部分で，半標準盤の条件に加え

$$
\begin{aligned}
&(1 \sim r \text{ 行にある } s \text{ の個数}) \\
\leqq\ &(1 \sim r-1 \text{ 行にある } s-1 \text{ の個数})
\end{aligned}
$$

が $1 \leqq r \leqq n$, $2 \leqq s \leqq n$ の範囲のすべての r, s に対し成り立たなくてはならない．図 3 の 2 つの盤が，形が $(3,2,2,1)/(2,1)$，ウェイトが $(2,2,1)$ の LR 盤のすべてである．

RS 対応の話は，まるで，$\rho_\mu \otimes \rho_\nu$ の既約分解が，ρ_μ の基底と ρ_ν の基底のテンソル積を部分集合に分割することによって得られるといっているかのようである．既約成分は一般にそんなベクトルでは張られないから，それがどんなによい性質をもつ全単射だと力説されても，具体的な対応を使って込み入った証明をすることは，表現論から見ると実感の乏しいことだったかもしれない．しかし Drinfeld–神保の量子群が発見され，伊達・神保・三輪によって，$GL(n, \mathbb{C})$ に対応する量子群の表現の $q \to 0$ での極限では，テンソル積の既約分解が本当にもとの空間の基底のテンソル積の分割を与え，それが RS 対応と一致することが示されると，この全単射は初めて表現論的に現実のものと認識されたのだと思う．そしてこの世界は柏原による結晶基底に発展する．そのような動きを同時代的に見せていただくことができたのは大変幸運だった．

なお，皆様の敬称は略させていただきました．

参考文献

1) W. Fulton, Young Tableaux, ケンブリッジ大学出版局, 1997（およびそこの参考文献 Fulton–Harris 等）.
2) 柏原正樹（C. Cochet 記）, Bases cristallines des groupes quantiques（講義録）, フランス数学会, 2002.

（てらだ・いたる，東京大学大学院数理科学研究科）

関数等式と表現論

小木曽 岳義

1. はじめに

ここでは数論の中で大変重要な役割を果たし，多くの数学者を魅了している**リーマンゼータ関数**が表現論の中に現れる**概均質ベクトル空間**によって「高次元化」されることを紹介します．

2. 素数についての話題

ここで素数についての 2 つの話題を紹介しましょう．1 つめは，$\frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots$ と循環小数で表せますが，これを $0.\dot{1}4285\dot{7}$ と書くことにします．この 7 という素数の逆数の循環小数展開に注目するとき，

$$\tfrac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7},\quad \tfrac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4},\quad \tfrac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\dot{1},$$
$$\tfrac{4}{7} = 0.\dot{5}7142\dot{8},\quad \tfrac{5}{7} = 0.\dot{7}1428\dot{5},\quad \tfrac{6}{7} = 0.\dot{8}5714\dot{2}$$

のように，長さ 6 の 1 つのサイクル「142857」が巡回して出てきます．他の素数，例えば $p = 13$ について $\frac{1}{13}$ から $\frac{12}{13}$ の小数展開には

$$\tfrac{1}{13} = 0.\dot{0}7692\dot{3},\quad \tfrac{2}{13} = 0.\dot{1}5384\dot{6},\quad \tfrac{3}{13} = 0.\dot{2}3076\dot{9},$$
$$\tfrac{4}{13} = 0.\dot{3}0769\dot{2},\quad \tfrac{5}{13} = 0.\dot{3}8461\dot{5},\quad \tfrac{6}{13} = 0.\dot{4}6153\dot{8},$$
$$\tfrac{7}{13} = 0.\dot{5}3846\dot{1},\quad \tfrac{8}{13} = 0.\dot{6}1538\dot{4},\quad \tfrac{9}{13} = 0.\dot{6}9230\dot{7},$$
$$\tfrac{10}{13} = 0.\dot{7}6923\dot{0},\quad \tfrac{11}{13} = 0.\dot{8}4615\dot{3},\quad \tfrac{12}{13} = 0.\dot{9}2307\dot{6}$$

のように 1 つではなく，2 つの長さ 6 のサイクル「076923」，「153846」が出てきますし，$p = 17$ について $\frac{1}{17}$ から $\frac{16}{17}$ の小数展開には 1 つの長さ 16 のサイクル「0588235294117647」が出てきます．実は 2,5 以外のすべての素数 p について，$\frac{1}{p}$ から $\frac{p-1}{p}$ の小数展開に現れる異なるサイクルの個数を r 個，各サイクルについて長さはみな同じで，それを l とすると，$p-1 = rl$ が成立することが知られていて，1 つのサイクルしか出てこないものは，17 の後は $19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193, 223, 229, 233, 257, 263, 269, \ldots$ と続き，300 以下の素数の大体 38 パーセントくらいです．

では，一体全素数の中でサイクルの長さが $p-1$ のものを 1 つだけ持つ素数の割合はどれくらいでしょうか？

2 つめの話題に移りましょう．2 以外の素数はすべて奇数で，それらは奇素数と呼ばれています．これらの奇素数は 4 で割ったら 1 余るものと 3 余るものに分けられますが，前者を A 組，後者を B 組とします．

A 組	$5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, \ldots$
B 組	$3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, \ldots$

さてこの A 組，B 組の素数についてその出方を調べてみると意外なことに気が付きます．1 つ目の例のように小さい順に 10 以下，20 以下，... と区切って，どちらの素数が多く出ているか調べると以下のようになり，

～以下	10	20	30	40	50	60	70	80
A 組の個数	1	3	4	5	6	7	8	9
B 組の個数	2	4	5	6	8	9	10	12
B のリード	1	1	1	1	2	2	2	3

ここまではずっと B 組の素数のほうが多いことに気が付きます．そこで今度は計算機などを用いて 100 単位で区切ってみていくと以下のようになり

～以下	100	200	300	400	500	600	700	800	900
A 組の個数	11	21	29	37	44	51	59	67	74
B 組の個数	13	24	32	40	50	57	65	71	79
B のリード	2	3	3	3	6	6	6	4	5

今度もやはり B 組の素数のほうが多く，もう少し頑張って，計算機でもう少し大きなところを見てみますと

～以下	1000	2000	3000	5000	7000	10000	15000	20000
A 組の個数	80	147	211	329	442	609	866	1125
B 組の個数	87	155	218	339	457	619	887	1136
B のリード	7	8	7	10	15	10	21	11

となり，ここまできても依然 B 組がリードしています．この先もずっと B 組がリードし続け，常に B 組のほうがリードしているのだろうと思ってしまいそうですが，26849 のところで両組は初めて並び，26861 でついに A 組は 1473 個，B 組は 1472 個となり逆転します．しかしこの逆転は長くは続かず，B 組は直後の 26863 で追いつき，その後再びリードします．そし

てA組の次の逆転は616481で，この逆転はしばらく続きますが，633799でB組が追いついて，その後少なくとも1000万まで逆転はありません．この先A組とB組の個数のレースはどうなるのでしょうか？

このように素数は気まぐれで，一瞬規則的であるようにも見えたり，また，とらえどころがなく，ランダムに散らばっているようにも見えるので，そこから法則を見つけ出したり証明するのは難しいと長年考えられていましたが，200年前ごろから**ゼータ関数**と呼ばれるものと，その仲間である**L関数**に素数たちの様子が映し出されることが次第に分かってきました．ここで言っているゼータ関数とは

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

($\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束）と定義される**リーマンゼータ関数**やその一般化のことを言います．このリーマンゼータ関数は，

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \prod_{p=\text{素数}} (1-p^{-s})^{-1} \\ &= \left(\tfrac{2^s}{2^s-1}\right)\cdot\left(\tfrac{3^s}{3^s-1}\right)\cdot\left(\tfrac{5^s}{5^s-1}\right)\cdots\end{aligned}$$

のように素数に関係した無限積に変形できます．この積表示のことを**オイラー積**表示といいます．2つ目の話題に関係するのは L 関数のオイラー積

$$\begin{aligned}L(s) = &\left(\frac{1}{1-\frac{0}{2^s}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{-1}{3^s}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\right)\cdot \\ &\left(\frac{1}{1-\frac{-1}{7^s}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{-1}{11^s}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{13^s}}\right)\cdots\end{aligned}$$

で，それぞれの因子にある $1, -1$ はその素数が4で割った余りが1か3に応じて決まっており，素数2のときは0となります．L 関数についてはここではこれ以上扱いませんが，文献4)を参照して下さい．これらの関数を用いることで，1つ目の話題に関して**E. アルティン（E. Artin）**は全素数の中でサイクルを1つしか持たない素数の割合は

$$C = \prod_{p=\text{素数}} \frac{p^2-p-1}{p^2-p}$$

（大体37パーセント）であると予想しています（文献1)，文献2)参照）．2つ目の話題に関しては「決着がつく」ではなく，「抜きつ抜かれつの攻防をがどこまでも続く」，すなわち無限回リードが入れ替わることが示されています（文献13)に上記の内容の詳細やその先の話が大変面白く書かれていますし，もう少し専門的な話については文献9)を参照のこと）．

素数と関連して出てきたリーマンゼータ関数でしたが，この関数は様々なゼータ関数の原型であり，素数分布について多くの情報を提供するだけでなく，いろいろな神秘的な謎を秘めており多くの数学者を魅了しています．以下ではこの関数の満たすもう一つの重要な性質である**関数等式**にスポットを当てて，そのある方向への一般化（高次元化）の話をします．

3. ゼータ関数の関数等式

リーマンゼータ関数について，**解析接続**，**関数等式**について以下で大雑把な説明をしましょう．今日では $\zeta(s)$ の s を複素変数として扱いますが，歴史的にみれば，初期には当然，s が実数の場合だけが考察の対象になっていました．そこで，複素変数の場合と区別するために以下では実変数で考えるときには変数を σ と書くことにします．このとき級数 $\zeta(\sigma)$ は $\sigma > 1$ で絶対収束します．実際，$\sigma := \mathrm{Re}(s)$ とおくとき，$\sigma > 1$ ならば

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \le 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} x^{-\sigma} dx \\ &= 1 + \int_{1}^{\infty} x^{-\sigma} dx = 1 + \frac{1}{\sigma - 1}\end{aligned}$$

となります．しかし，$\sigma = 1$ に対しては

$$\begin{aligned}&1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &\ge 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots\end{aligned}$$

と考えると $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \ge 1 + \frac{n}{2}$ が成立するから発散することが分かります．変数を実数 σ に限定している限り，この級数の値は $\sigma = 1$ で無限大になってしまい，それより左側には進むことができません．しかし s を複素数と見たとたん，目の前には複素平面という広い世界が広がり，$\sigma = 1$ の障壁は複素関数の解析接続で回避できるものとなります．以下，複素関数 $\frac{1}{1-s}$ を例に解析接続について大雑把な説明をします．$\frac{1}{1-s}$ は $s = 0$ でテイラー展開を始めても $s = 1$ の極にひっかかるために収束域は $|s| < 1$ までしか延びませんが，$|s| < 1$ で定義された関数を $s = 0$ 以外の点でテイラー展開し直すことで，定義域が延びることがあります．例えば，$\frac{1}{1-s}$ を $s = \frac{i}{2}$ を中心にテイラー展開すると，その収束域は極 $s = 1$ にひっかかるまで延びるので $|s - \frac{i}{2}| < \frac{\sqrt{5}}{2}$ まで延びます．定義域内でのテイラー展開を繰り返すことで，一

致の定理により，正則関数の定義域を延ばしていくことができます．これが解析接続です．このことより，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s^n = 1 + s + s^2 + \cdots$ は $|s| < 1$ でのみ絶対収束しますが，全 $\mathbb{C}$ 平面に解析接続されて $s = 1$ にのみ極を持つ解析関数 $\dfrac{1}{1-s}$ を表します．以上の準備の下にリーマン（Riemann）の論文[8]の以下の結果に注目しましょう．

定理（Riemann）
(i) $\zeta(s)$ は複素全平面に有理型関数として解析接続でき，$s = 1$ を除いて正則である．
(ii) $s = 1$ は $\zeta(s)$ の 1 位の極であり，そこでの留数は 1 である．
(iii) 任意の s に対して，以下の等式が成立する．
$\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ とおくとき，

$$\hat{\zeta}(1-s) = \hat{\zeta}(s)$$

が成り立つ．この等式のことを**関数等式**という．ただし，$\Gamma(s)$ は**ガンマ関数**とする．

ここで上記の定理の説明として，ガンマ関数について文献 5) に沿って補足説明をします．n, s を自然数とするとき，$(n+s)! = n!(n+1)(n+2)\cdots(n+s) = n!n^s\{(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{s}{n})\}$ であり，一方，$(n+s)! = (s-1)!s(s+1)\cdots(s+n)$ でもあるので，

$$(s-1)! = \frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{n}\right)\right\}$$

となりますが，このとき左辺は n に関係がないので，

$$(s-1)! = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}$$

（$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{n}\right) = 1$ を使っている）．このとき，この式の右辺は $s \in \mathbb{C}$ でも意味を持つので，$s \in \mathbb{C}$ について，

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}$$

と複素関数 $\Gamma(s)$ を定義し，これをガンマ関数と呼びます．ガンマ関数 $\Gamma(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ のとき絶対収束する積分

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$$

でも与えられます．部分積分により容易に $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ が示されますが，$\mathrm{Re}(s) \leq 0$ に対しては上記の等式が成り立つように定義してやることで，$\Gamma(s)$ を全複素平面で有理型な関数に延長することができます．その極は $s = 0, -1, -2, -3, \ldots$ のみで，すべて 1 位の極であり，また零点は存在しません．さらに $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$ が成立するので，$\zeta(s)$ の関数等式は $\hat{\zeta}(s)$ を用いずに

$$\zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}\zeta(1-s), \qquad (3.1)$$

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s) \qquad (3.2)$$

と書かれることも多いです．定理の (iii) の関数等式は，$\zeta(s)$ が直線 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ を対称軸とする美しい対称性を持っていることを示しています．既にオイラー（Euler）は複素関数論のない時代に，巧みな総和法によって $\zeta(s)$ の負の整数点における正しい値を求め，それをもとに関数等式の形を推測していたと言われていますが，$\zeta(s)$ の解析接続と関数等式を明確に証明したのはリーマンの業績です．関数等式 (3.1) により，$s = -2, -4, -6, \ldots$ は $\zeta(s)$ の 1 位の零点になります．これを $\zeta(s)$ の**自明な零点**といいます．半平面 $\mathrm{Re}(s) < 0$ にはこれら以外には零点がないことも同時に分かります．点 $s = 0$ だけは，$\zeta(1-s)$ の極となるため，ガンマ関数の商の部分の零点が，その極と打ち消し合って (3.1) の左辺には零点は出てきません．こうして $\mathrm{Re}(s) > 1, \mathrm{Re}(s) < 0$ における $\zeta(s)$ の零点の位置は完全に分かりました．したがって，後には帯状の領域 $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ だけが残ります．この領域を $\zeta(s)$ の**臨界領域**といい，この領域における $\zeta(s)$ の零点の分布の研究は極めて困難ですが，リーマンは $\zeta(s)$ の臨界領域にある零点がすべて直線 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 上にあるだろう，と予想しています．これは**リーマン予想**と呼ばれ，現代数学における最大の未解決問題の一つです（文献 6) 参照）．リーマン予想やその一般化である“一般リーマン予想”が正しければ成立する予想はたくさんありますが，例えば，冒頭の一つ目の素数の話題に関するアルティン予想[2]や 2 つ目の素数の話題について，零点の虚部が $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立という仮定の下で「A 組と B 組のレース展開の詳細」を説明する予想[9]があります．

リーマンの 1859 年の論文[8]には関数等式の証明が 2 種類載っており，一つは複素関数論的な経路積分を用いた証明（リーマンの第 1 証明）であり，もう一つは**テータ級数** $\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z}$ $\quad(\mathrm{Im}(z) > 0)$ を用いるもの（リーマンの第 2 証明）で，大雑把なアイデアは以下の通りです．ヤコビ（Jacobi）によるテータ級数の変換公式：$\theta(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}\theta(z)$ を用いて $\hat{\zeta}(s)$ を変形すると，

$$\hat{\zeta}(s) = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\theta(ix)-1}{2}\right)dx$$
$$= \int_0^1 (\cdots)dx + \int_1^\infty (\cdots)dx$$
$$= \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{(1-s)}{2}-1}\right)\frac{(\theta(ix)-1)}{2}dx + \frac{1}{s(s-1)}.$$

右辺はすべての複素数 s において意味を持ち，$s \mapsto 1-s$ で不変です．

このリーマンゼータ関数はいろいろな方向に一般化されています．その中で，関数等式を満たし，多項式から定義されるものに注目しましょう．**エプシュタイン（Epstein）ゼータ関数**は，$\mathrm{Re}(s) > \frac{m}{2}$ 正定値 2 次形式 $x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_m^2$ について

$$\zeta_m(s) = \sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}} \frac{1}{(n_1^2+\cdots+n_m^2)^s}$$

として定義されますが，上記の意味でのリーマンゼータ関数の一般化です．$\widehat{\zeta_m}(s) = \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta_m(s)$ とおくと以下が成り立ちます．

$$\widehat{\zeta_m}\left(\frac{m}{2}-s\right) = \widehat{\zeta_m}(s).$$

この関数等式の証明はリーマンの第 2 証明の類似で以下のようにできます．

$$\widehat{\zeta_m}(s) = \int_0^\infty x^{s-1}(\theta(ix)^m - 1)dx$$
$$= \int_1^\infty (x^{s-1} + x^{(\frac{m}{2}-s)-1})(\theta(ix)^m - 1)dx + \frac{\frac{m}{2}}{s(s-\frac{m}{2})}.$$

これより $\zeta_m(s)$ の解析接続，関数等式が導かれます．この方向性に，つまり多項式で定義されるようなゼータ関数へのリーマンゼータ関数の一般化を以下で考えていきますが，そこに今回の表題のもう一つのキーワードである表現論の中に現れる**概均質ベクトル空間**が関係してきます．以下そのことを説明しましょう．この一般化はオイラー積表示までは期待できませんが，関数等式を満たす方向への一般化です．

4. リーマンゼータ関数から概均質ベクトル空間のゼータ関数へ

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の急減少関数の空間，すなわち $\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな関数で，任意の多項式 $p(x)$ に対して $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|p(x)\partial^m f| < \infty$, $\partial^m f = \dfrac{\partial^{m_1+\cdots+m_n} f}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}}$ がすべての $m = (m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{Z}_{>0}^n$ に対して成り立つものとします．$n = 1$ のとき，$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し，

$$\hat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)e^{\pi ixy}dy$$

を**フーリエ（Fourier）変換**とします．$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ はフーリエ変換で不変ですが，このとき以下の**ポアソン（Poisson）の和公式**

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(n) \tag{4.1}$$

が成立します．この和公式に基づいてリーマンゼータ関数の関数等式の証明を再定式化しましょう．

$$\zeta(s)\int_{\mathbb{R}^\times}|x|^{s-1}\varphi(x)dx = \int_0^\infty x^{s-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\varphi(nx)dx$$
$$= \int_1^\infty x^{s-1}\sum_{n\neq 0}\varphi(nx)dx + \int_1^\infty x^{(1-s)-1}\sum_{m\neq 0}\hat{\varphi}(mx)dx - \left(\frac{\hat{\varphi}(0)}{1-s} + \frac{\varphi(0)}{s}\right).$$

右辺は任意の複素数 s で意味を持ち，$(s,\varphi) \mapsto (1-s,\hat{\varphi})$ で不変です．上記の左辺に現れている積分

$$\int_{\mathbb{R}^\times}|x|^{s-1}\varphi(x)dx$$

を**局所ゼータ関数**といいます．この積分は $\mathrm{Re}(s) > 0$ で絶対収束し，さらに s の有理関数として $\mathbb{C}$ 全体に解析接続されます．ここでリーマンゼータ関数の関数等式を既知とするならば，任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し**局所関数等式**

$$\int_{\mathbb{R}^\times}|x|^{s-1}\hat{\varphi}(x)dx = 2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\int_{\mathbb{R}^\times}|x|^{(1-s)-1}\varphi(x)dx \tag{4.2}$$

が得られますが，逆にこの局所関数等式を先に証明することでリーマンゼータ関数の関数等式の証明が得られます．試験関数 φ を $\varphi(x) = e^{-\pi ix^2}$ と特殊化すると局所関数等式はガンマ関数のよく知られた公式（(3.1) と (3.2) のガンマ因子が等しいとする公式）となり，上記の議論はリーマンの第 2 証明そのものに他なりません．

上記の論法の拡張として，$P(x) = x$ という 1 次多項式を高次の多項式に一般化して，

「多項式 $P(x), P^*(x)$ が満たす局所関数等式があるとポアソンの和公式と組み合わせて

$\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Z}^n, P(x)\neq 0}\frac{1}{|P(x)|^s}$ と $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Z}^n, P^*(x)\neq 0}\frac{1}{|P^*(x)|^s}$ とを結ぶ関数等式ができる」

ことが期待されます．そのことについて以下大雑把に解説しましょう．$V_{\mathbb{R}}$ を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間（$V_{\mathbb{R}}^*$ をその双対空間），L をその**格子**（**lattice**）とします．すなわち $V_{\mathbb{R}}$ の基底 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ を適当にとると

$$V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}v_1 + \cdots + \mathbb{R}v_n \supset L = \mathbb{Z}v_1 + \cdots + \mathbb{Z}v_n$$

となるものです．$L^* = \{y \in V_{\mathbb{R}}^* | y(L) \subset \mathbb{Z}\}$ を L の**双対格子**（**dual lattice**）と呼ぶ．$\varphi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ のフーリエ変換 $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ を

$$\hat{\varphi}(y) = \int_{V_{\mathbb{R}}} \varphi(x) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dx$$

と定めます．ここで $x \in V_{\mathbb{R}}, y \in V_{\mathbb{R}}^*$ に対して，$y(x)$ を $\langle x, y \rangle$ と記します．$V_{\mathbb{R}}/L$ の体積を $vol(L) = \int_{V_{\mathbb{R}}/L} dx$ とおくとき，ポアソンの和公式は，

$$\sum_{x \in L} \varphi(x) = \frac{1}{vol(L)} \sum_{y \in L^*} \hat{\varphi}(y) \tag{4.3}$$

となります．残る問題は (4.2) の一般化ですが，それは次のような形になるべきです．ベクトル空間 V 上のある多項式 $P(x)$ について，V^* 上の多項式 $P^*(y)$ が存在して，$|P(x)|^{s-\kappa}$ のフーリエ変換が

$$\int |P(x)|^{s-\kappa} \hat{\varphi}(x) dx$$

$$= (\Gamma - 因子)) \times \int |P^*(y)|^{-s} \varphi(x) dx \tag{4.4}$$

を満たすことです．

それでは，この局所関数等式 (4.4) を満たす多項式のペア $P(x), P^*(y)$ をどのように見つけるかということが問題になりますが，佐藤幹夫氏によって創始された概均質ベクトル空間の理論は，この期待が満たされるような多項式 P, P^* の求め方を与えるものです．

5. 概均質ベクトル空間の基本定理

m 次元複素正則行列全体のなす群 $GL_m(\mathbb{C})$ を n 次一般線型群と呼びます．$GL_m(\mathbb{C})$ の部分群 G が線型代数群であるとは，$M_m(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{m^2}$ 上の多項式たちの共通零点となっていることとします（$GL_m(\mathbb{C})$ 自身も線型代数群とします）．例えば，$SL_m(\mathbb{C}) = \{X \in GL_m(\mathbb{C}); 1 - \det X = 0\}$ や $O_m(\mathbb{C}) = \{X \in GL_m(\mathbb{C}); {}^tXX = I_m\}$ ($I_m = m$ 次元単位行列) などは線型代数群です．そして線型代数群 G が**連結**であるとは指数有限の部分線型代数群が存在しないこととします．例えば $O_m(\mathbb{C})$ は指数 2 の部分代数群 $SO_m(\mathbb{C}) \cap SL_m(\mathbb{C})$ をもつから連結ではありませんが，$SL_m(\mathbb{C})$ や $SO_m(\mathbb{C}), GL_m(\mathbb{C})$ などは連結線型代数群です．V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間とし，$GL(V)$ を V の正則線型変換全体のなす群とします．線型代数群 G の準同型 $\rho: G \to GL(V)$ を V における**表現**と呼びます．V の基底をとって，$V = \mathbb{C}^n, GL(V) = GL_m(\mathbb{C})$ とみると，$\rho(g) = (\rho_{ij}(g)) \in GL_m(\mathbb{C})$ と表されますが，各 $\rho_{ij}(g)$ が $g = (g_{st}) \in GL_m(\mathbb{C})$ の有理関数になっているとき，ρ を**有理表現**といいます．V の部分集合が**ザリスキー**（**Zariski**）**閉集合**とは，V 上のある多項式たちの共通零点になることです．そして，V の部分集合 A の**ザリスキー閉包** $\overline{A}$ とは A を含む最小のザリスキー閉集合のことです．$\overline{A} = V$ となる部分集合 A は，**ザリスキー稠密**であると言われます．

G を連結線型代数群，ρ を有限次元 G の有理表現とし，V をその表現空間とするとき，3 組 (G, ρ, V) において，V がザリスキー稠密な G 軌道 $\rho(G)v_0 = \{\rho(g)v_0; g \in G\}$ が存在するときに**概均質ベクトル空間**（**prehomogeneous vector space**）であるといい，略して PV と書きます．V におけるその $\rho(G)v_0$ の補集合 S を**特異集合**という．G 軌道 $\rho(G)v_0$ には，群 G が推移的に作用するから，いわゆる均質空間（homogeneous space）ですが，$V = \overline{\rho(G)v_0}$ はベクトル空間 V が群 G の作用で，「ほとんど均質」であることを意味し，この意味で，(G, ρ, V) を概均質ベクトル空間と呼びます．このとき V 上の多項式あるいは有理式 P で G のある有理指標 χ に対して $P(\rho(g)v) = \chi(g)P(v)$ を満たすものを (G, ρ, V) の相対不変式といいますが，(G, ρ, V) が Hessian が恒等的に 0 にならないような相対不変式を持つときに正則概均質ベクトル空間といいます．正則概均質ベクトル空間 (G, ρ, V)，およびその双対空間 (G, ρ^*, V^*) について，開軌道の補集合 S, S^* は絶対既約超曲面であるとするとき S を定義する多項式 P と S^* を定義する多項式 P^* は，それぞれ $(G, \rho, V), (G, \rho^*, V^*)$ の相対不変式になることが知られています．すなわち，$P(\rho(g)v) = \chi(g)P(v), P^*(\rho^*(g)v^*) = \chi^{-1}(g)P^*(v^*)$ となります．ここで P, P^* の次数は同じになるが，それを d 次であるとします．このとき，$P^*(\mathrm{grad}_x)P(x)^{s+1} = b(s)P(x)^s$ を満たすような s の d 次多項式 $b(s)$ が存在し，これを **b-関数**といいますが，柏原正樹氏により，$b(s) = b_0(s + \alpha_1) \cdots (s + \alpha_d), \alpha_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ と分解することが知られています．その b-関数の分解に沿って，$\gamma(s) := \prod_{i=1}^d \Gamma(s + \alpha_i)$ とおきます．このときそれぞれの空間の開軌道の実点の集合の連結成分への分解を

考えると，$(V-S)_{\mathbb{R}}=\bigcup_{i=1}^{\nu}\Omega_i$，　$(V^*-S^*)_{\mathbb{R}}=\bigcup_{i=1}^{\nu}\Omega_i^*$ と同数の連結成分に分解します．$\mathrm{Re}(s)>0$ のとき，$f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}), f^*\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ に対して，

$$\frac{1}{\gamma(s)}\int_{\Omega_j}|P(x)|^s f(x)dx,\quad \frac{1}{\gamma(s)}\int_{\Omega_j^*}|P^*(y)|^s f^*(y)dy$$

はともに $s\in\mathbb{C}$ について $\mathbb{C}$ 上正則に解析接続されて，それぞれ $V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}^*$ 上の緩増加超関数を定めます．このとき，局所関数等式

$$\int_{\Omega_i^*}|P^*(y)|^{s-\frac{n}{d}}\hat{f}(y)dy$$

$$=\gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)\sum_{j=1}^{\nu}c_{ij}(s)\int_{\Omega_j}|P(x)|^{-s}f(x)dx$$

が成立します．これは**概均質ベクトル空間の基本定理**と呼ばれます．ただし，$n=\dim V=\dim V^*, d=\deg P=\deg P^*$ としています．ここで $c_{ij}(s)$ は f によらない指数関数，三角関数による簡単な表示を持つ有理型関数です．ここでいくつか例をあげると，

(例 1)　PV $(GL(n), M(n))$ の相対不変式 $\det X$，$X\in M(n)$（$M(n)$ は $n\times n$ 正方行列全体）の満たす局所関数等式について，$n=1$ の場合のガンマ因子からリーマンゼータ関数の関数等式のガンマ因子が得られる．

(例 2)　PV $(GL(1)\times SO(n), V(n))$ の実型（real form）で正定値な2次形式を相対不変式に持つ場合，その相対不変式の局所関数等式のガンマ因子からエプシュタインゼータ関数の関数等式のガンマ因子が得られる．一般の符号数 (p,q) の2次形式 $P^*=P=\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\sum_{j=p+1}^{p+q}x_j^2$ の場合の局所関数等式に現れるガンマ因子は実点の連結成分の個数（$=\nu$）に対して行列表示したものは

$$\pi^{-2s-\frac{p+q}{2}-1}\Gamma(s+1)\Gamma\left(s+\frac{p+q}{2}\right)$$
$$\times\begin{bmatrix}-\sin\pi(s+\frac{q}{2}) & \sin(\frac{\pi p}{2})\\ \sin(\frac{\pi q}{2}) & -\sin\pi(s+\frac{p}{2})\end{bmatrix}$$

で与えられますが，これより**ジーゲル（Siegel）の2次形式のゼータ関数**の関数等式のガンマ因子が得られる．

(例 3)　2元3次形式 $F_x(u,v)=x_1u^3+x_2u^2v+x_3uv^2+x_4v^3$ の空間 $V(4)$ に $g\in GL(2)$ が $g\cdot F_x(u,v)=F_x((u,v)g)$ と作用し，$(GL(2),V(4))$ は概均質ベクトル空間となり，$P=x_2^2x_3^2+18x_1x_2x_3x_4-4x_1x_3^3-4x_2^3x_4-27x_1^4x_4^2$ を相対不変式に持ちますがこの空間についての関数等式のガンマ因子の行列表示が，新谷卓郎氏[12)]により以下のように与えられています．

$$\frac{3^{3s-2}}{2\pi^{4s}}\Gamma(s)^2\Gamma(s-\tfrac{1}{6})\Gamma(s+\tfrac{1}{6})\begin{bmatrix}\sin 2\pi s & \sin\pi s\\ 3\sin\pi s & \sin 2\pi s\end{bmatrix}.$$

この例は数論的に大変興味深い対象で，例えば2次体で古典的に知られていた数論的考察が3次体でもできることがこの例によって分かりました[12)]．

概均質ベクトル空間のゼータ関数の数論への応用と表現論との関係について簡単に述べて終わろうと思います．古典的に1次形式や2次形式について成立している性質を高次形式に一般化するところで概均質ベクトル空間が重要な役割を果たしていることが多いですが，例えば，数論への応用としては，数論的量の漸近評価，ゼータ関数の特殊値と保型形式の次元公式などがあり，他の表現論との関係としては，放物型部分群の冪零軌道，Harish-Chandra の微分方程式系，Aomoto–Gelfand の超幾何微分方程式系などがあります（文献 11)，文献 7) 参照）．

最後になりましたが，執筆に当たり大変有益なご指摘，アドバイスを頂いた神戸大学の谷口隆氏，富山大学の木村巌氏に感謝致します．

参考文献

1) R.K. Guy, J.H. Conway, *The Book of Numbers*, Springer-Verlag New York, 1996.
2) C. Hooley, On Artin's conjecture, *J. Reine Angew. Math.* **225**, 209–220, 1967.
3) 数理科学 2011 年 9 月号，特集「オイラー」，サイエンス社．
4) 数理科学 2011 年 1 月号，特集「数論の探求」，サイエンス社．
5) 木村達雄著，『概均質ベクトル空間』，岩波書店，2011．
6) 松本耕二著，『リーマンのゼータ関数』，朝倉書店，2005．
7) 落合啓之著，「概均質ベクトル空間の展望」，第 10 回整数論サマースクール報告集．246–265, 2002.
8) B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatsber. Preuss. Akad. wiss. Berlin (1859), 671–680.
9) M. Rubinstein and P. Sarnak, Chebyshev's Bias, *Experiment math.* **3**, Issue 3 , 173–197, 1994.
10) 佐藤文広著，『Eisenstein 級数と概均質ベクトル空間のゼータ関数』，Rokko Lectures in Mathematics, vol.2, 1996.
11) 佐藤文広著，「概均質ベクトル空間に関連する文献」数理解析研究所講究録，vol.**924**, 263–296, 1995.
12) T. Shintani, On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms. *J. Math. Soc. Japan*, **24**, 132–188, 1972.
13) 谷口隆，ブログ「びっくり数学島」の中の「素数のレース」，http://sugakujuku.blog109.fc2.com/blog-entry-18.html

（こぎそ・たけよし，城西大学理学部）

量子化された τ 函数の正則性

黒木　玄

1. 量子 τ 函数に関する私的な歴史

筆者は τ 函数を量子化したいと学生時代からずっと思っていた．無限自由度を持つソリトン系の τ 函数の量子化は難しいかもしれないが，その有限自由度系への簡約である Painlevé 系の τ 函数ならば試行錯誤によって比較的容易に量子化できるのではないかと感じていた．

ここで「量子化」は「正準量子化」(Poisson 括弧を交換子に置き換えること）を意味し，「q 差分化」を意味していないことに注意せよ．筆者の研究分野では「(正準) 量子化」と「q 差分化」が別々に実行可能な状況がよく現れるのでそれらを明確に区別しておきたい．

量子化には Poisson 構造のデータが必要なので，τ 函数の Poisson 括弧の定義が書いてある論文を筆者は最初に探してみたのだが，見つからなかった．Poisson 括弧さえ知られていない状況で量子化を試みるというとても苦しい状況に追い込まれた．

しかし，2011 年 5 月 26 日に筆者は Bäcklund 変換の立場（すなわち Weyl 群双有理作用の立場[5,6]）から Painlevé 系の τ 函数を量子化するための正しそうな処方箋を発見した．すなわち，Painlevé 方程式のパラメーター変数の正準共役変数の指数函数として τ 変数 τ_i を導入すればすべてがうまくいきそうなことに気付いた．その日の早朝に自宅の机の前に座ると手が勝手に動いていかにも正しそうな公式を書いてくれた．あまりにも単純明解な処方箋で力が抜けた．自分は何て馬鹿だったのかと思った．

しかし「τ 函数を正しく量子化した」と自信を持って言えるためには証拠が不足していた．定義が正しいことを示すためにはその定義から「良い定理」が得られることを証明しなければいけない．

その「良い定理」が何であるべきであるかについては，古典の場合の τ 函数を Weyl 群双有理作用の立場で扱っている野海・山田の論文[6]（および野海の著書[5]）を見れば明らかである．証明されるべき定理は「τ 函数の正則性（多項式性)」である．

野海・山田の論文[6]では τ 変数への Bäcklund 変換の作用で生成された古典 τ 函数が従属変数 f_i たちの多項式になることが一般的に（すなわち任意の対称化可能一般 Cartan 行列に付随する Weyl 群双有理作用の場合に）証明されている．その結果は，双線形化された Painlevé 方程式の各種有理函数解（漸化式で定義される）が実際には多項式解になることを系として含んでいる．

例えば $A_2^{(1)}$ 型 (Painlevé IV 型) の場合の τ 函数の正則性（多項式性）から次の漸化式で定義される有理函数 $Q_m(x)$ がすべて多項式になることが導かれる（この $Q_m(x)$ は岡本多項式と呼ばれている)：$Q_0 = Q_1 = 1$,

$$Q_{m+1} = \frac{Q''_m Q_m - (Q'_m)^2 + (x^2 + 2m - 1) Q_m^2}{Q_{m-1}}.$$

実際にこの漸化式から $Q_m(x)$ を順番に求めてみ

ればそれらがすべて多項式になることが非自明であることを実感できるだろう．不思議なことにすべてが割り切れるのである．野海・山田の結果[6]は系としてこれに類似の多くの結果を含んでいる．

以上のようなことを知っていた筆者はすぐに量子化された τ 函数の正則性（多項式性）が実際に成立していることを具体例で確認する作業に入った．古典の場合の Weyl 群双有理作用の計算は有理函数の計算になるので，その量子化の計算は非可換有理函数の計算になる．しかし，(非可換) 多項式になると信じている式が計算ミスのせいで多項式にならなかったりすることも多く，大変な苦労があった．数式処理ソフトの利用も考えたが，非可換有理函数を直接扱えるソフトを見つけることはできなかった．

大変な計算を続けるうちに表現論における基本的な結果のひとつを思い出した．それは Kac–Moody 代数の表現の圏 $\mathcal{O}$（いわゆる BGG 圏）における平行移動函手（translation functor）の理論[1]についてである．

そして，2011 年 7 月 9 日に量子化された τ 函数の正則性 (多項式性) が平行移動函手の理論から導かれることを確認できた．ドミナント整ウェイト λ,μ に対する平行移動函手 $T:\mathcal{O}_\lambda\to\mathcal{O}_{\lambda+\mu}$ が完全函手でかつ $T(M(w\circ\lambda))=M(w\circ(\lambda+\mu))$ を満たしていることから，量子化された τ 函数の正則性が導かれる．ここで $w\circ\lambda$ は Weyl 群の元 w の λ への shifted action を表し，$M(\lambda)$ は Verma 加群を表している．

古典の場合の τ 函数の正則性（多項式性）は本質的に「行列式がその成分の多項式になること」に帰着して証明される[5,6]．その帰着にはソリトン方程式の佐藤理論[7]の枠組みが使われ，古典 τ 函数が行列式で表されることになる．

筆者[4]による平行移動函手を使った量子 τ 函数の正則性の証明はそれとは本質的に異なる．

筆者の論文[4]では，単に量子化された場合だけではなく，量子展開環（量子群）の理論を使って量子化かつ q 差分化された場合も扱っている．しかし，この論説では読み易さを重視するために q 差分化されていない場合のみを扱うことにする．

2. 従属変数とパラメーター変数と τ 変数

この論説では Painlevé 方程式そのものには触れずに，その τ 函数にあたるものを代数的に直接扱うことにする．対称化可能一般 Cartan 行列に対する Kac–Moody 代数とその Weyl 群を一般的に扱うこともできるが，簡単のために一般線形 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n$（n 次正方行列全体のなす Lie 代数）と置換群 S_n の場合を扱うことにする．野海の著書[5]の第 7 章にそれなりに近い記号法を用いる予定だが，古典と量子の場合を同時に扱うことにする．

まず $n\times n$ の上三角行列 M を導入しよう：

$$M=\begin{bmatrix}-\varepsilon_1^\vee & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1n}\\ & -\varepsilon_2^\vee & f_{23} & & f_{2n}\\ & & -\varepsilon_3^\vee & \ddots & \vdots\\ & & & \ddots & f_{n-1,n}\\ \text{\huge 0} & & & & -\varepsilon_n^\vee\end{bmatrix}.$$

さらに $f_i=f_{i,i+1}$ とおく．f_{ij} を**従属変数**と呼び，$\varepsilon_i^\vee$ たちを**パラメーター変数**と呼ぶことにする (対角成分の負号は本質的なものではない)．

古典の場合には従属変数とパラメーター変数を（可換な）多項式環を生成する不定元とみなし，Poisson 構造が $\{f_{ji},f_{lk}\}=\delta_{jk}f_{li}-\delta_{li}f_{jk}$, $\{\varepsilon_i^\vee,\varepsilon_j^\vee\}=\{\varepsilon_i^\vee,f_{kj}\}=0$ によって与えられていると考える．

量子の場合にはそれらの変数は非可換な変数であり，**基本関係式** $[f_{ji},f_{lk}]=\delta_{jk}f_{li}-\delta_{li}f_{jk}$, $[\varepsilon_i^\vee,\varepsilon_j^\vee]=[\varepsilon_i^\vee,f_{jk}]=0$ を満たしていると考える．ここで $[A,B]=AB-BA$ である．量子の場合の f_{ji} が満たす基本関係式は行列単位 E_{ij} の満たす関係式に等しい．したがって f_{ji} たちは対角成分がすべて 0 の下三角行列全体のなす Lie 代数の普遍展開環を生成する．特に f_{ij} たちは一般線形 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n$ の元とみなされる．f_{ij} たちで生成される代数は f_i たちのみで生成され，f_i たちの満たす基本関係式は **Serre 関係式** $[f_i,[f_i,f_{i\pm1}]]=0$, $[f_i,f_j]=0$ $(j\neq i\pm1)$ になる．

古典と量子のどちらの場合にも，対角成分がすべて 1 の上三角行列 $U = [u_{ij}]$ で M を $M = UD_{-\varepsilon^\vee}U^{-1}$ と対角化するものが一意に存在する．ここで $D_{-\varepsilon^\vee} = -\operatorname{diag}(\varepsilon_1^\vee, \dots, \varepsilon_n^\vee)$ である（野海の著書[5]でこの U は P と書かれている）．$MU = UD_{-\varepsilon^\vee}$ の両辺を比較すれば u_{ij} をすべて具体的に求めることができる．例えば $n = 3$ の場合に U は次の形になる：

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{f_1}{\varepsilon_1^\vee - \varepsilon_2^\vee} & \frac{f_1 f_2}{(\varepsilon_1^\vee - \varepsilon_3^\vee)(\varepsilon_2^\vee - \varepsilon_3^\vee)} + \frac{f_{13}}{\varepsilon_1^\vee - \varepsilon_3^\vee} \\ 0 & 1 & \frac{f_2}{\varepsilon_2^\vee - \varepsilon_3^\vee} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

量子の場合には従属変数たちの積の順序を勝手に交換してはいけないことに注意せよ．一般の n で

$$u_{i,i+1} = \frac{f_i}{\alpha_i^\vee}, \quad \alpha_i^\vee := \varepsilon_i^\vee - \varepsilon_{i+1}^\vee$$

となることと，すべての u_{ij} が従属変数については多項式になることが確かめられる（パラメーター変数については有理函数になる）．$\alpha_i^\vee$ を**コルートパラメーター変数**と呼ぶことにしよう．

z 変数 z_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ を導入しよう．

古典の場合には z_i は従属変数とパラメーター変数と共に多項式環を生成する不定元であるとみなし，Poisson 構造が $\{z_i, \varepsilon_j^\vee\} = \delta_{ij} z_i$, $\{z_i, z_j\} = \{z_i, f_{jk}\} = 0$ によって与えられていると考える．

量子の場合には z_i は非可換な変数であり，基本関係式 $[z_i, \varepsilon_j^\vee] = \delta_{ij} z_i$, $[z_i, z_j] = [z_i, f_{jk}] = 0$ を満たしていると考える．そのとき z_i はパラメーター変数 $\varepsilon_i^\vee$ たちの正準共役変数 $\partial/\partial\varepsilon_i^\vee$ の指数函数と同一視できる：$z_i = \exp(\partial/\partial\varepsilon_i^\vee)$．すなわち z_i は $\varepsilon_i^\vee$ を 1 ずらす差分作用素である．

τ 変数 τ_i を $\tau_i = z_1 z_2 \cdots z_i$ と定める．**τ 変数はコルートパラメーター変数の正準共役変数の指数函数とみなされる**．実際，古典の場合には $\{\tau_i, \alpha_j^\vee\} = \delta_{ij}\tau_i$ が成立し，量子の場合には $[\tau_i, \alpha_j^\vee] = \delta_{ij}\tau_i$ が成立している．

最後に Z 行列を導入しよう：

$$Z = UD_Z, \quad D_Z := \operatorname{diag}(z_1, \dots, z_n).$$

古典の場合にはすべての変数が可換なので $M = ZD_{-\varepsilon^\vee}Z^{-1}$ が成立し，量子の場合には z_i が $\varepsilon_i^\vee$ を 1 ずらすので $M = Z(D_{-\varepsilon^\vee} + E)Z^{-1}$ となる．ここで E は単位行列である．

z 変数は上三角行列 M を対角化する上三角行列 Z の対角成分である．τ 変数は z 変数で表されるので，τ 変数は Z 行列の対角部分に住んでいるとみなすことができる．

以上の構成の真に新しい点は z 変数や τ 変数について Poisson 構造や交換関係をはっきり定義したことだけである．その点を除けば野海の著書[5]の第 7 章の構成をそのまま引き写したに過ぎない．しかし，量子化された場合の Weyl 群作用は非可換性を記述している基本関係式を保たなければいけない．だから τ 変数についてもどのような基本関係式を設定するかを決めないと先に進めなくなってしまう．

3. 従属変数とパラメーターへの Weyl 群作用

前節の設定のもとで，古典と量子の両方の場合について，従属変数 f_{ij} とパラメーター変数 $\varepsilon_i^\vee$ への Weyl 群双有理作用を構成しよう．

我々が扱っている場合の **Weyl 群** W は n 次の置換群 S_n になるので，Weyl 群の一般論を読者は知らなくても大丈夫である．隣り合う数 i と $i+1$ の互換を $s_i = (i, i+1)$ と書くことにする．任意の置換は隣り合う数の互換の繰り返しで実現可能なので置換群 $W = S_n$ は $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ から生成される．そして s_i たちの基本関係式は $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ という組紐関係式と $s_i^2 = 1$ であることが知られている．置換群 $W = S_n$ の作用を作ることはそれらの関係式を満たすような s_i の作用を作ることに等しい．

古典と量子の両方の場合において行列 G_i を次のように定める：

$$G_i = E + g_i E_{i+1,i}, \quad g_i = -\frac{\alpha_i^\vee}{f_i}.$$

ここで E は単位行列であり，E_{ij} は (i, j) 成分だけが 1 で他の成分が 0 の行列単位である．

このとき，G_i は $g_i E_{i+1,i}$ の分だけ下にはみ出

た下三角行列であるにもかかわらず，$G_iMG_i^{-1}$ は M と同じく上三角行列になる（この条件で g_i が一意に決定される）．$G_iMG_i^{-1}$ が具体的にどのような形になるかは $n=6$, $i=3$ の場合について具体的に計算してみればわかる（読者は実際にその計算を実行してみよ）．

実は $s_i(M)=G_iMG_i^{-1}$ によって，Weyl 群 $W=S_n$ の従属変数とパラメーター変数への作用を定めることができる．その具体形は以下の通り：

$$s_i(f_{kl})=\begin{cases} f_{ki}-f_{k,i+1}g_i & (l=i), \\ f_{i+1,l}+g_if_{il} & (k=i+1), \\ f_{kl} & (\text{他の場合}), \end{cases}$$

$$s_i(\varepsilon_j^\vee)=\varepsilon_{s_i(j)}^\vee=\begin{cases} \varepsilon_{i+1}^\vee & (j=i), \\ \varepsilon_i^\vee & (j=i+1), \\ \varepsilon_j^\vee & (\text{他の場合}). \end{cases}$$

この作用が古典の場合の Poisson 構造と量子の場合の基本関係式を保つことは容易に確認できる．

例えば $s_i(f_j)$ は，古典の場合には

$$s_i(f_j)=f_j+\alpha_i^\vee\{f_i,f_j\}/f_i$$

の形をしており，量子の場合には

$$s_i(f_j)=f_j+\alpha_i^\vee[f_i,f_j]f_i^{-1} \qquad (\sharp)$$

の形をしている．$[f_i,[f_i,f_j]]=0$ より $[f_i,f_j]$ と f_i が可換になっていることにも注意せよ．

$w\in W$ の**従属変数を動かさない作用**を $\tilde{w}$ と書くことにする：$\tilde{s}_i(f_j)=f_j$, $\tilde{s}_i(\varepsilon_j^\vee)=\varepsilon_{s_i(j)}^\vee$．このとき上のように定めた s_i の従属変数とパラメーター変数への作用は古典の場合には

$$s_i(a)=\exp(\mathrm{ad}_{\{,\}}\,\alpha_i^\vee\log f_i)\circ\tilde{s}_i(a) \qquad (*_c)$$

と書け[6]，量子の場合には

$$s_i(a)=f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i(a)f_i^{-\alpha_i^\vee} \qquad (*)$$

と書けることがわかる[2,4]．ここで $(\mathrm{ad}_{\{,\}}f)(g)=\{f,g\}$ と定めた．非可換環における非整数べきの取扱いの詳細については筆者の論文[4]を参照せよ．これらの公式は任意の対称化可能一般 Cartan 行列に付随する量子化かつ q 差分化された Weyl 群双有理作用の場合にも成立している．

上の公式から作用を計算する方法は以下の通り．古典の場合には $\{\gamma,f\}=\{\gamma,g\}=0$ のとき

$$\exp(\mathrm{ad}_{\{,\}}\,\gamma\log f)(g)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma^k}{k!}\frac{(\mathrm{ad}_{\{,\}}\,f_i)^k(g)}{f_i^k}$$

が成立しており，量子の場合には，非整数べきを適切な状況で適切に定義すれば，$[\gamma,f]=[\gamma,g]=0$ のとき

$$f^\gamma gf^{-\gamma}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\gamma}{k}(\mathrm{ad}\,f)^k(g)f^{-k}.$$

が成立している．ここで $(\mathrm{ad}\,f)(g)=[f,g]$ である．後者の公式は前者の公式の量子化になっている．例えば，量子の場合には公式 $(*)$ に上の公式を適用すると $(\mathrm{ad}\,f_i)^2(f_j)=0$ が成立しているので，実際に公式 $(\sharp)$ が得られることがわかる．

筆者が公式 $(*)$ に気付いたのは 2003 年 11 月 23 日である[3]．公式 $(*)$ で Weyl 群作用を定めることの利点は代数自己同型作用（代数の基本関係式を保つ作用）になることが最初から明らかになることである．公式 $(*)$ は τ 変数 τ_i への Weyl 群作用にそのまま拡張される（次節を見よ）．

余談．$f_1=\partial=d/dx$, $f_2=x$ とおくと，$[f_1,[f_1,f_2]]=0$ と $[f_2,[f_2,f_1]]=0$ が成立している．このとき $f_i^{\alpha_i^\vee}$ を用いて構成された量子化された s_i の作用が $s_1s_2s_1=s_2s_1s_2$ を満たしていることと $\partial^a x^{a+b}\partial^b=x^b\partial^{a+b}x^a$ の成立はほぼ同じことである．この事実は量子化された Weyl 群双有理作用の理論はいわゆる "fractional calculus" と深く関係していることを示唆している．

M への s_i の作用の公式 $s_i(M)=G_iMG_i^{-1}$ から U に関する次の公式が得られる：

$$s_i(U)=G_iUS_i^g. \qquad (U)$$

ただし行列 S_i^g を次のように定めた：

$$S_i^g=g_i^{-1}E_{i,i+1}-g_iE_{i+1,i}+\sum_{k\neq i,i+1}E_{kk}.$$

このように定めると $G_iUS_i^g$ が対角成分がすべて 1 の上三角行列になることを確認せよ．

4. τ 変数への Weyl 群作用と τ 函数の導入

前節までの設定のもとで，z 変数と τ 変数に Weyl 群作用を拡張し，τ 函数を定義しよう．

互換 $s_i = (i, i+1)$ の従属変数を動かさない作用 $\tilde{s}_i$ を $\tilde{s}_i(z_j) = z_{s_i(j)}$ によって z 変数まで拡張しておく．このとき $\tilde{s}_i(\tau_i) = \tau_{i-1}\tau_{i+1}/\tau_i$, $\tilde{s}_i(\tau_j) = \tau_j$ $(j \neq i)$ が成立する．ただし $\tau_0 = 1$ と約束しておく．$\tilde{s}_i$ の作用は古典の場合には Poisson 構造を保ち，量子の場合には基本関係式を保つ．

前節で構成した従属変数とパラメーター変数への Weyl 群作用を，古典の場合には前節の公式 $(*_c)$ によって，量子の場合には公式 $(*)$ によって z 変数と τ 変数への作用に拡張する．その拡張の仕方より，s_i の作用は古典の場合には Poisson 構造を保ち，量子の場合には基本関係式を保つ．

古典の場合には $\{\tau_i, \alpha_j^\vee\} = \delta_{ij}\tau_i$ によって，量子の場合には $\tau_i\alpha_j^\vee = (\alpha_j^\vee + \delta_{ij})\tau_i$ によって，どちらの場合にも

$$s_i(\tau_i) = f_i\frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i}, \quad s_i(\tau_j) = \tau_j \ (j \neq i)$$

が成立することがわかる．例えば量子の場合には

$$s_i(\tau_i) = f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i(\tau_i)f_i^{-\alpha_i^\vee} = f_i^{\alpha_i^\vee}\frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i}f_i^{-\alpha_i^\vee}$$
$$= f_i^{\alpha_i^\vee}f_i^{-\alpha_i^\vee+1}\frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i} = f_i\frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i}.$$

z 変数への作用も同様に計算すると，古典の場合にも量子の場合にも

$$s_i(z_j) = \begin{cases} f_i z_{i+1} & (j = i), \\ f_i^{-1} z_i & (j = i+1), \\ z_j & (j \neq i, i+1) \end{cases}$$

となることがわかる．この作用を対角行列 $D_Z = \mathrm{diag}(z_1, \dots, z_n)$ を用いて表すと

$$s_i(D_Z) = (S_i^g)^{-1} D_Z S_i \qquad (D_Z)$$

となる．ただし行列 S_i を古典の場合には

$$S_i = -(\alpha_i^\vee)^{-1}E_{i,i+1} + \alpha_i^\vee E_{i+1,i} + \sum_{k\neq i,i+1} E_{kk}$$

と定め，量子の場合には

$$S_i = -(\alpha_i^\vee - 1)^{-1}E_{i,i+1} + (\alpha_i^\vee + 1)E_{i+1,i} + \sum_{k\neq i,i+1} E_{kk}$$

と定めておく．このとき $Z = UD_Z$ と $M = Z(D_{\varepsilon_i^\vee} + E)Z^{-1}$ に公式 (U), (D_Z) を適用すると，$s_i(Z) = G_i Z S_i$ と $s_i(M) = G_i M G_i^{-1}$ が得られる．

$\varepsilon_1^\vee, \dots, \varepsilon_n^\vee$ で張られる格子 $Q^\vee$ の双対格子 P の双対基底を $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ と書くことにする．$Q^\vee$ への Weyl 群作用は P への Weyl 群作用 $s_i(\varepsilon_j) = \varepsilon_{s_i(j)}$ を誘導する．

$\Lambda_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i$ と定める．Λ_i の非負整数一次結合全体のなす可換半群を P_+ と書き，P_+ の元を**ドミナント整ウェイト**と呼ぶ．整ウェイト $\nu = \sum_i \nu_i\Lambda_i \in P$ に対して，τ 変数の Laurent 単項式 τ^ν を $\tau^\nu = \tau_1^{\nu_1}\cdots\tau_n^{\nu_n}$ と定める．このとき $\tilde{s}_i(\tau^\nu) = \tau^{s_i(\nu)}$ が成立している．

$w \in W$ と $\mu = \sum_i \mu_i\Lambda_i \in P_+$ に対する **τ 函数** $\tau_{(w(\mu))}$ を次のように定める：

$$\tau_{(w(\mu))} = w(\tau^\mu) \quad (w(\mu) \in WP_+).$$

$s_i(\tau_j) = \tau_j$ $(j \neq i)$ より，τ 函数 $\tau_{(w(\mu))}$ は $w(\mu) \in WP_+$ だけで決まり，w と μ の取り方によらないことがわかる（我々が扱っている $W = S_n$ の場合には $WP_+ = P$ となる．一般に有限型の場合には $WP_+ = P$ となるが，有限型でない場合にはそうならない）．理解を深めたい読者は簡単な場合に τ 函数の具体例を計算しておくとよい．

5. τ 函数の正則性（多項式性）

定理（τ 函数の正則性）．すべての τ 函数 $\tau_{(w(\mu))}$ $(w(\mu) \in WP_+)$ は従属変数 f_i とパラメーター変数 $\alpha_i^\vee$ の多項式と $\tau^{w(\mu)}$ の積の形になる．

この形の結果は前節までの設定に留まらず，任意の対称化可能一般 Cartan 行列に付随する Weyl 群双有理作用の場合にも成立している．古典の場合は野海・山田[6]の定理であり（野海の著書[5]も参照せよ），量子の場合は筆者[4]の定理である．さらにこの結果は量子化かつ q 差分化された場合にも

拡張可能である[4].

古典の場合には野海の著書[5]にもあるように，τ 函数の行列式表示を得ることによってその正則性が証明される．量子の場合にも同様の筋道をたどれば容易に τ 函数の正則性を示せそうだが，非可換行列式は必ずしもその成分の多項式になるとは限らず，一般には非可換有理函数になるという事情があるので，実際には容易ではない．

筆者は古典の場合とは完全に異なる証明法を発見した．それはBGG圏 $\mathcal{O}$ における**平行移動函手**（**translation functor**）を使う方法である．表現論の結果を使える理由は，τ 変数への Weyl 群作用を公式 $(*)$ で定めたおかげで，量子 τ 函数と Verma 加群における**特異ベクトル**（**singular vector**）を関係付けられるからである．

以下 $\mu, \lambda \in P_+$ であるとする．Weyl 群の元 w はその生成元 s_i たちの積で表される．その最短の表示を w の簡約表示と呼ぶ．以下では $w = s_{i_N} \cdots s_{i_2} s_{i_1}$ は簡約表示であると仮定する．

このとき量子の場合の $\widetilde{w}^{-1}(\tau_{(w(\mu))})$ は

$$\widetilde{w}^{-1}(\tau_{(w(\mu))}) = \Phi^{-1}\Psi\tau^{\mu}.$$

と表される．ここで

$$\begin{aligned}
\Phi &= f_{i_1}^{\beta_1} \cdots f_{i_N}^{\beta_N}, \\
\Psi &= f_{i_1}^{\beta_1+\langle\beta_1,\mu\rangle} \cdots f_{i_N}^{\beta_N+\langle\beta_N,\mu\rangle}, \\
\beta_k &= s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}^{\vee}).
\end{aligned}$$

$\langle\,,\,\rangle$ は $Q^{\vee}$ とその双対格子 P の間の自然な内積を表している．ゆえに量子 τ 函数の $\tau_{(w(\mu))}$ の正則性は Ψ が Φ で左から“割り切れること”に同値である．

$\rho = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \cdots + \Lambda_{n-1}$ とおき，$\lambda \in P$ への $w \in W$ の **shifted action** を $w \circ \lambda = w(\lambda+\rho) - \rho$ と定める．

Φ の積の順序を逆転し，β_i に $\langle\beta_i, \lambda+\rho\rangle$ を代入して得られる Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathrm{gl}_n$ の普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ の元を $F_{w,\lambda}$ と表す：

$$F_{w,\lambda} = f_{i_N}^{\langle\alpha_{i_N}^{\vee}, s_{i_{N-1}} \cdots s_{i_1} \circ \lambda\rangle + 1} \cdots f_{i_1}^{\langle\alpha_{i_1}^{\vee}, \lambda\rangle + 1}.$$

いわゆる Verma 恒等式より，$F_{w,\lambda}$ は w の簡約表示の取り方によらない．そして最高ウェイト λ を持つ $U(\mathfrak{g})$ の Verma 加群 $M(\lambda)$ の最高ウェイトベクトルを v_λ と書くとき，$F_{w,\lambda}v_\lambda$ は $M(\lambda)$ の特異ベクトルになり，Verma 加群 $M(w \circ \lambda)$ に同型な部分加群を生成する．

さらに Ψ から同様にして作った $U(\mathfrak{g})$ の元は $F_{w,\lambda+\mu}$ になり，$F_{w,\lambda+\mu}v_{\lambda+\mu}$ は $M(w \circ (\lambda+\mu))$ に同型な $M(\lambda+\mu)$ の部分加群を生成する．量子 τ 函数 $\tau_{(w(\mu))}$ の正則性は任意の $\lambda \in P_+$ に対して $F_{w,\lambda+\mu}$ が $F_{w,\lambda}$ で右から“割り切れること”を示すことに帰着する．実際に割り切れることを示すためには $M(w \circ \lambda)$ と $M(w \circ (\lambda+\mu))$ を適切に関係付ける方法があれば良い．ちょうどそれが平行移動函手 T が満たしている公式

$$T(M(w \circ \lambda)) = M(w \circ (\lambda+\mu))$$

であったというのが，筆者の結論である[4]．

参考文献

1) Deodhar, Vinay V., Gabber, Ofer, and Kac, Victor. Structure of some categories of representations of infinite-dimensional Lie algebras. *Adv. in Math.* **45** (1982), no.1, 92–116.

2) Kuroki, Gen. Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems. *Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics*, 289–325, *Adv. Stud. Pure Math.*, **61**, *Math. Soc. Japan*, Tokyo, 2011. `arXiv:0808.2604`.

3) `http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20100630_Osaka.pdf` の第 0.2 節.

4) Kuroki, Gen. Regularity of quantum τ-functions generated by quantum birational Weyl group actions. `arXiv:1206.3419`.

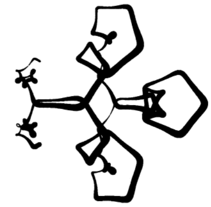
5) 野海正俊.『パンルヴェ方程式—対称性からの入門—』. 数学の風景 4，朝倉書店，2000 年.

6) Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Birational Weyl group action arising from a nilpotent Poisson algebra. Physics and combinatorics 1999 (Nagoya), 287–319, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001. `arXiv:math.QA/0012028`.

7) Sato, Mikio and Sato, Yasuko. Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassmann manifold. Nonlinear partial differential equations in applied science (Tokyo, 1982), 259–271, *North-Holland Math. Stud.*, **81**, North-Holland, Amsterdam, 1983.

（くろき・げん，東北大学大学院理学研究科）

物理を通して学ぶ表現論



橋本 義武

1. スピンと質量

わたしは数学の中でもトポロジーという分野の研究者なのですが，トポロジーに物理学，特に場の量子論のアイデアが用いられるようになった時代の影響の下で場の量子論に関心をもつようになりました．そのため表現論については数学の中の隣接分野としてというよりむしろ場の量子論を経由して知った部分が大きいようです．場の量子論は現代における人知の到達点ともいうべき巨大な存在です．物理学者は変数分離，対角化，漸近展開，ガウス積分といった古典的な数学技法を駆使してこれを築いてきました．数学者としてこれを理解しようとするときその複雑さや現代数学と古典数学のギャップに途方に暮れるわけですが，一つ手がかりになるものがあるとすればそれは表現論ではないかと思います．

物理学を勉強したときに一番よくわからなかったのは「電子はスピン 1/2 であり，光子はスピン 1 である」とかいうときの**粒子のスピン**という量のことでした．一番よくわからないということはおそらく一番重要なのです．一番重要なことがわかっていないという状態で停滞していたとき，ポアンカレ群の表現論の本[1,2]を読み，**表現論の観点から見るとスピンと質量は同じタイプの量である**ということを知ってちょっと感動しました．ここではその話をします．

ところでスピンに関連してスピン量子数という量もあります．ややこしい話ですが，スピンとスピン量子数は別の量です．スピンは負でない半整数（2 倍が整数になる数）の値をとる量です．スピン量子数は，スピン s の粒子の場合，$s, s-1, s-2, \ldots, -s$ のいずれかの値をとります．スピンはその粒子が何であるかで決まっていますが，スピン量子数は粒子の状態によって変化します[3]．

哲学用語では，対象の属性のうち，その対象が何であるかによって決まる属性を**本質**といい，その対象の状態によって変化し得る属性を**偶有性**といいます．スピンは粒子の本質，スピン量子数は粒子の偶有性というわけです．また，質量は本質，エネルギー・運動量は偶有性です．速さは質量が正の粒子の場合は偶有性ですが，質量 0 の粒子の場合は常に光速 c に等しいので，本質ということになります．

2. 量子力学

複素正方行列 A の固有多項式 $\det(tE-A)$ は，代数学の基本定理により t の 1 次式の積に因数分解されます．これが重根をもたないとき，正則行列 P が存在して PAP^{-1} が対角行列になります．対角成分は固有多項式の根で，相異なる複素数です．このとき X を $AX = XA$ をみたす正方行列とすると，PXP^{-1} が対角行列になることが容易にわかります．この線型代数の定理は後で述べ

るシューアの**補題**の原型です．X は PXP^{-1} の**対角成分の任意性を除いて**決まってしまうわけですが，そういう強いことがいえたのは**複素数で考えていたから**です．

量子力学では，系に対して複素ベクトル空間 $\mathcal{H}$ を考え，系の状態を $\mathcal{H}$ の 0 でないベクトル u によって記述します．ただし，0 でない複素数 λ に対し，u と λu は同じ状態を表すとします．この任意性と複素数で考えていることとがいろいろな面白い現象をひきおこします．

量子力学を学ぶと，なぜ複素数で考えているのか，なぜ 0 でないスカラー倍の任意性を許すのか，という疑問が湧きますが，その疑問は上で述べた A と可換な行列を決定する問題に関わっているように見えます．

$\mathcal{H}$ に属するベクトル u, v に対し，**振幅**と呼ばれる複素数 $\langle u, v\rangle$ が対応します．これが**エルミート内積**を与えるとします．すなわち，

$$\begin{aligned}
&\langle \lambda u+\mu v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, w\rangle + \overline{\mu}\langle v, w\rangle,\\
&\langle w, \lambda u+\mu v\rangle = \lambda\langle w, u\rangle + \mu\langle w, v\rangle,\\
&\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle},\\
&\langle u, u\rangle > 0 \quad (u\neq 0)
\end{aligned}$$

が成立するとします．

0 でないベクトル u, v に対し

$$p = p(u, v) = \frac{\langle u, v\rangle\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle}$$

とおくと，これは u や v に 0 でない複素数をかけても変わりません．すなわち u, v の表す状態のみによって決まる量になっています．p は 0 以上の実数で，任意の実数 t に対して

$$\langle tu+v, tu+v\rangle \geq 0, \quad \langle itu+v, itu+v\rangle \geq 0$$

であることから，さらに $p \leq 1$ がいえます．そこで p を何かの確率と解釈することができるのではないかという話になります．また，

$$v = \sum_{j=1}^{n} u_j, \quad \langle u_j, u_k\rangle = 0 \quad (j\neq k)$$

のとき $\sum_{j=1}^{n} p(u_j, v) = 1$ となるという事実も確率解釈とよく合います．すなわち，p を確率と解釈するとき，「ベクトルをエルミート内積に関して互いに直交するベクトルの和で表す」ということが，場合分けに相当するのです．逆に，ベクトルの加法は場合分けの一般化になっているともいえます．

より一般に，0 でないベクトル $v_1, \ldots, v_n$ と $\{1, \ldots, n\}$ 上の置換 σ に対し，複素数

$$\prod_{j=1}^{n}\langle v_j, v_{\sigma(j)}\rangle / \prod_{j=1}^{n}\langle v_j, v_j\rangle$$

は状態のみによって決まる量です．

3. 群と表現

系の対称性を記述するのに用いられるのが群の概念です．

群とは，集合 G に乗法 $(g_1, g_2)\mapsto g_1g_2$，単位元 $e\in G$，逆 $g\mapsto g^{-1}$ という構造を付与したもので，

$$\begin{aligned}
&(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3), \quad eg = g = ge,\\
&g^{-1}g = e = gg^{-1}
\end{aligned}$$

を仮定する．さらに $g_1g_2 = g_2g_1$ が成立するものをアーベル群という．

群にはモノイドと亜群という 2 つの方向への一般化があります．両方へ一般化したものが圏です．

系 $\mathcal{H}$ が群 G の対称性をもつということを，G の各元 g に対して線型同型 $\rho(g):\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ を対応させることによって記述します．ただし，単位元 e に対し $\rho(e)$ は恒等写像であり，G の元 g_1, g_2 に対し 0 でない複素数 $\lambda(g_1, g_2)$ が存在して

$$\rho(g_1g_2) = \lambda(g_1, g_2)\rho(g_1)\rho(g_2)$$

が成立するとします．このような対応 ρ を $\mathcal{H}$ 上の G の射影表現といいます．特に $\lambda(g_1, g_2) = 1$ のとき線型表現，あるいは単に表現といいます．

$\mathcal{H}$ 上の G の射影表現 ρ に対し，$\mathcal{H}$ の部分ベ

クトル空間 V で任意の $g \in G, v \in V$ に対し $\rho(g)v \in V$ をみたすものを G 不変部分空間といいます．G 不変部分空間が $\{0\}, \mathcal{H}$ のみであるとき ρ を**既約表現**といいます．

群 G の表現 $(\rho, \mathcal{H}), (\rho', \mathcal{H}')$ に対し，線型写像 $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ で

$$T\rho(g) = \rho'(g)T \quad (g \in G)$$

をみたすものを **intertwiner** といいます．T が同型であるとき，ρ, ρ' は同値であるといいます．T の核・像はそれぞれ $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ の G 不変部分空間です．また $(\rho, \mathcal{H}) = (\rho', \mathcal{H}')$ の場合，T の固有空間は G 不変部分空間です．

したがって ρ, ρ' が既約表現の場合，ρ, ρ' が同値でないならば $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}'$ への intertwiner は 0 に限られ，ρ, ρ' が同値ならば $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}'$ への intertwiner 全体は 1 次元ベクトル空間になります．この定理を**シューアの補題**といいます．

また，エルミート内積に関して

$$\langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle = \langle u, v \rangle$$

が成立するとき ρ を**ユニタリ表現**といいます．この場合 $|\lambda(g_1, g_2)| = 1$ です．

ρ がユニタリ表現の場合，$\{0\}, \mathcal{H}$ 以外の G 不変部分空間 V があったら直交補空間

$$V^{\perp} = \{u \in \mathcal{H} \mid \langle u, v \rangle = 0 \ (v \in V)\}$$

も G 不変部分空間になるので，$\mathcal{H}$ を $V, V^{\perp}$ に分けて考えることができます．なので「これ以上分けられないもの」すなわち既約ユニタリ表現が基本的対象になるわけです．そういうわけで，G の対称性をもつ系を考えるときは G の既約射影ユニタリ表現を分類することが基本問題になります．

4. フーリエ級数から原子へ

シューアの補題からアーベル群の既約表現が 1 次元であることがわかります．実数全体の集合 $\mathbb{R}$，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は加法に関して，絶対値 1 の複素数全体の集合 $U(1)$ は乗法に関してアーベル群になるので，いずれも既約表現は 1 次元です．$\mathcal{H}$ を 1 次元複素ベクトル空間にエルミート内積を与えたものとします．$\mathbb{R}$ の既約ユニタリ表現は，$p \in \mathbb{R}$ により

$$\rho(x)u = \mathrm{e}^{ipx}u \quad (x \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{H})$$

と書けます．$x \in \mathbb{Z}$ とすればこれは $\mathbb{Z}$ の既約ユニタリ表現になりますが，その場合 p と $p + 2\pi$ は同じ表現を与えるので，$\mathbb{Z}$ の既約ユニタリ表現は $U(1)$ でパラメトライズされていることになります．

$\mathbb{R}$ 上のある複素数値関数の空間は $\mathbb{R}$ のユニタリ表現になっています．これを (ある意味で) 既約ユニタリ表現に分解するとすべての既約ユニタリ表現が 1 つずつ現れます．それが**フーリエ変換**です．

$U(1)$ の既約ユニタリ表現は，$n \in \mathbb{Z}$ により

$$\rho(\mathrm{e}^{ix})u = \mathrm{e}^{inx}u \quad (x \in \mathbb{R})$$

と書けます．円 $U(1)$ 上の複素数値関数の空間は $U(1)$ のユニタリ表現になっています．これを既約ユニタリ表現に分解するとすべての既約ユニタリ表現が 1 つずつ現れます．それが**フーリエ級数**です．

n 次直交行列（転置が逆行列になるような正方行列）で行列式が 1 であるもの全体の集合 $SO(n)$ は行列の積に関して群になります．これを n 次回転群といいます．原子の中の電子の場合，対称性は原子核のまわりの回転に対応する 3 次回転群 $SO(3)$ です．シュレーディンガー方程式を動径方向と角方向に変数分離して解くと，角方向の関数すなわち球面上の複素数値関数の空間は $SO(3)$ のユニタリ表現になっています．これを既約ユニタリ表現に分解するとすべての既約ユニタリ表現が 1 つずつ現れます[4)]．既約ユニタリ表現のベクトルを球面上の関数として実現するのが**球面調和関数**で，これが分子の形を決定しています[5)]．このように原子の理論の基礎をフーリエ級数を円から球面に拡張したものとして見ることができ，しかもそれが物質の形を理解する上でキーポイントになっているわけです．このようなアングルを表現論が与えてくれるのです．

5. スピン

ここでは $SO(3)$ の既約射影ユニタリ表現について考察します．まず準備をします．

群 G から群 H への写像 φ で，

$$\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2), \quad \varphi(e) = e$$

をみたすものを**準同型**という．逆写像 $\varphi^{-1}: H \to G$ が存在するときは φ^{-1} も準同型になる．このとき φ を**同型**といい，G と H は互いに同型であるという．

n 次ユニタリ行列（転置の複素共役が逆行列になるような正方行列）で行列式が 1 であるもの全体の集合 $SU(n)$ は群になります．$SU(2)$ の元は，複素数 α, β で $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ をみたすものにより

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$$

と書けます．

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

をパウリ行列といいます．$x_j, y_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, 3)$ に対し，

$$X = x_1\sigma_1+x_2\sigma_2+x_3\sigma_3,\ Y = y_1\sigma_1+y_2\sigma_2+y_3\sigma_3$$

とおくと，$\frac{1}{2}\mathrm{tr}XY = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ となります．一方 $g \in SU(2)$ に対し，$g\sigma_j g^{-1}$ は $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の実数係数の 1 次結合になり，

$$\mathrm{tr}(gXg^{-1})(gYg^{-1}) = \mathrm{tr}XY$$

が成立します．よって

$$g \mapsto (X \mapsto gXg^{-1})$$

により，群の準同型 $\pi : SU(2) \to SO(3)$ が得られます．これは 2 対 1 の全射です．これによって $SO(3)$ の既約射影ユニタリ表現は，$SU(2)$ の既約ユニタリ表現と 1 対 1 に対応します．

$V_{n/2}$ を 2 変数 n 次同次多項式全体のなす $n+1$ 次元複素ベクトル空間とし，$SU(2)$ の表現を

$$\rho(g)f(z, w) = f(\alpha z - \overline{\beta}w, \beta z + \overline{\alpha}w)$$

によって定義すると，これは既約表現で，ユニタリ表現になるようにエルミート内積を入れることができます．数 $s = n/2$ を**スピン**と呼びます．s が整数のとき V_s は $SO(3)$ の線型表現になります．

G の表現 $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ のテンソル積 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ は G の表現になります．$SU(2)$ の既約表現のテンソル積は

$$V_s \otimes V_{s'} = V_{|s-s'|} \oplus V_{|s-s'|+1} \oplus \cdots \oplus V_{s+s'}$$

のように既約表現に分解します．

古典力学では角運動量はベクトルなので加えることができますが，量子力学では角運動量の 1 つの成分が確定すると他の 2 つの成分が不確定になるので，角運動量ベクトルというものは考えられず角運動量の和をどう考えたらよいかが問題になります．上に述べた表現のテンソル積に関する定理は，量子力学における角運動量の和の理解を与える非常に重要なものです．

なお表現のテンソル積の挙動からもとの群 G を再現することができる場合があり，淡中双対性と呼ばれています[6]．その原型は $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, U(1)$ の既約ユニタリ表現がそれぞれ $\mathbb{R}, U(1), \mathbb{Z}$ でパラメトライズされているという話[7]（ポントリャーギン双対性）で，後者の群構造は前者の群の表現のテンソル積に対応しています．淡中双対性を一般化・抽象化したのが淡中圏・テンソル圏・モノイダル圏の理論で，ガロワ理論，ホモトピー論，低次元トポロジーにも深く関わっていて，これらに表現論的パースペクティブを与えています．

6. 相対論

重力の効果を無視するとき，時空 M には光速が常に一定になるような座標系が存在します．これを慣性系と呼びます．時間と長さの単位を光速

c が 1 になるように固定します．同じ単位に関する 2 つの慣性系 $\varphi_1, \varphi_2 : M \to \mathbb{R}^4$ によって，

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : M \to M, \quad \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

と書ける写像をポアンカレ変換または非同次ローレンツ変換といいます．ポアンカレ変換全体のなす群を**ポアンカレ群**といいます．これは平行移動全体のなす群 $\mathbb{R}^4$ を含みます．原点 $0 \in \mathbb{R}^4$ を固定するポアンカレ変換 $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ をローレンツ変換といいます．ローレンツ変換全体のなす群を**ローレンツ群**といいます．

ローレンツ変換 L は

$${}^tLJL = J, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

をみたす実 4 次正方行列 $L = (L^\mu_\nu)_{\mu,\,\nu=0,\,1,\,2,\,3}$ で表されます．ローレンツ変換は $\det L$, L^0_0 の正負によって 4 種類に分けられます．

ポアンカレ変換 $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ に対し，$L(x) = P(x) - P(0)$ とおけば L はローレンツ変換になります．そこでポアンカレ変換も $\det L$, L^0_0 の正負によって 4 種類に分けることができます．

$\det L > 0$, $L^0_0 > 0$ であるローレンツ変換の群を $\varLambda$ とし，対応するポアンカレ変換全体のなす群を Π とします．Π は平行移動の群 $T = \mathbb{R}^4$ を含み，$L \in \varLambda, x \in T, y \in \mathbb{R}^4$ に対し，

$$\begin{aligned}(LxL^{-1})(y) &= L(L^{-1}(y) + x) = y + L(x) \\ &= (L(x))(y)\end{aligned}$$

より，$LxL^{-1} = L(x) \in T$ となります．

相対論と量子力学の要請の下で，系の状態は群 Π の射影ユニタリ表現のベクトルで記述されます．**基本になるのは Π の既約射影ユニタリ表現で**，これが相互作用していないときの素粒子（自由粒子）の状態の空間を与えると考えられます．そこで以下，Π の既約射影ユニタリ表現について考察します．結論を先にいうと，質量とスピンが Π の既約射影ユニタリ表現を指定するのです．

7. 群の作用

まず準備をします．

群 G が集合 X に**作用する**とは，$g \in G, x \in X$ に対し $gx \in X$ が対応して，

$$g_1(g_2x) = (g_1g_2)x, \quad ex = x$$

が成り立つことである．このとき $x \in X$ に対し，X の部分集合

$$Gx = \{gx \mid g \in G\}$$

を x を含む G 作用の軌道という．X は互いに共通部分をもたない軌道の和に分割される．G の部分集合

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

も群になる．これを x の固定化群という．

また $x \in X$, $g \in G$ に対し，写像 $G_x \to G_{gx}$, $h \mapsto ghg^{-1}$ が群の同型を与える．

前述のように群 $\varLambda$ は $T = \mathbb{R}^4$ に作用します．T の双対ベクトル空間を T^* とします．物理的にはこれは時空の平行移動に対する保存量の空間，すなわちエネルギー・運動量空間です．$L \in \varLambda$, $p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in T^*$ に対し，$Lp \cdot Lx = p \cdot x$ $(x \in T)$ となるように $Lp \in T^*$ を定めることによって，群 $\varLambda$ は T^* にも作用します．そこで**エネルギー・運動量空間 T^* をローレンツ変換の群 $\varLambda$ の作用の軌道の和に分割する**ことを考えます．

結論をいうと，質量に対応する正数 m に対し，$\{0\}$ および

$$\begin{aligned}
T^*(m^2, +) &= \{p \in T^* \mid {}^t pJp = m^2,\ p_0 > 0\}, \\
T^*(m^2, -) &= \{p \in T^* \mid {}^t pJp = m^2,\ p_0 < 0\}, \\
T^*(0, +) &= \{p \in T^* \mid {}^t pJp = 0,\ p_0 > 0\}, \\
T^*(0, -) &= \{p \in T^* \mid {}^t pJp = 0,\ p_0 < 0\}, \\
T^*(-m^2) &= \{p \in T^* \mid {}^t pJp = -m^2\}
\end{aligned}$$

がすべての軌道になります．次元を 1 つ下げて $\mathbb{R}^3$

の場合に同様のことを考えると，$T^*(m^2, \pm)$ は二葉双曲面，$T^*(0, \pm)$ は円錐面，$T^*(-m^2)$ は一葉双曲面になります．

$p \in T^*(m^2, \pm)$ に対し，固定化群 Λ_p は $SO(3)$ に同型です．ポアンカレ群の表現論では，Λ_p を小群（little group）と呼んでいます．

8. 表現の構成

$p \in T^*(m^2, +)$ に対し，$(\rho_p, \mathcal{H}_p)$ を小群 Λ_p のスピン s の既約射影ユニタリ表現とします．群 T の $\mathcal{H}_p$ 上のユニタリ表現を

$$\rho_p(x)u = \mathrm{e}^{ip\cdot x}u \quad (x \in T,\, u \in \mathcal{H}_p)$$

によって与えると，$L \in \Lambda_p, x \in T$ に対し，$\rho_p(L)\rho_p(x) = \rho_p(x)\rho_p(L)$ であり，一方

$$\rho_p(LxL^{-1})u = \mathrm{e}^{ip\cdot Lx}u = \mathrm{e}^{ip\cdot x}u = \rho_p(x)u$$

より $\rho_p(LxL^{-1}) = \rho_p(x)$ です．

$L \in \Lambda$ に対し，エルミート計量を保つ同型 $\rho_{p,L} : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_{Lp}$ で任意の $L_1 \in \Lambda_p$ に対し

$$\rho_{p,L}\rho_p(L_1)\rho_{p,L}^{-1} = \rho_{Lp}(LL_1L^{-1})$$

をみたすものを固定します．シューアの補題により，取り方の任意性が絶対値 1 の複素数倍に限られることがわかります．

これを用いて，直和

$$\mathcal{H}_{m,s} = \bigoplus_{p\in T^*(m^2,+)} \mathcal{H}_p$$

上に群 Π の既約射影ユニタリ表現が定義できます．

こうして，質量 $m > 0$ とスピン s に対して群 Π の既約射影ユニタリ表現が得られました．すなわち，質量とスピンは相対論と量子力学の基本的要請から必然的に帰結する粒子の本質的属性なのです．

なお群 Π の既約射影ユニタリ表現は他にもあり，特に質量 0 の場合が重要ですが，ここでは省略します．

9. クライン–ゴルドン方程式

スピン 0 の場合，$\mathcal{H}_{m,0}$ は，クライン–ゴルドン方程式

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2 + m^2)\phi = 0$$

をフーリエ変換で解くと

$$\phi(x) = \mathrm{e}^{ip\cdot x}, \quad {}^t pJp = m^2$$

という解が得られますが，そのうち $p_0 > 0$ をみたすものの 1 次結合全体のなすベクトル空間として得られます．この構成は線型偏微分方程式の理論を用いて表現を構成するというアイデアの原型ともいえるでしょう．

参考文献

1) 大貫義郎『ポアンカレ群と波動方程式』岩波書店．
2) G.W. Mackey, Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics, Benjamin.
3) ファインマン他『ファインマン物理学 V 量子力学』岩波書店．
4) 山内恭彦・杉浦光夫『連続群論入門』培風館．
5) 友田修司『フロンティア軌道論で化学を考える』講談社．
6) シュヴァレー『リー群論』ちくま学芸文庫．
7) ポントリャーギン『連続群論 上』岩波書店．

（はしもと・よしたけ，東京都市大学知識工学部）

名著に親しむ

——特集から広がる読書案内——

蟹江　幸博

日本語でできる，表現論のさまざまな入り方

特集の目次を眺めるだけでも表現論というものにはさまざまな切り口があると感じられることだろう．

表現にもいろいろあるが，何よりまず群の表現であり，ガロアが群を提起して以来，群は問題を解くための道具であり，重要な応用は表現を介することが多い．19 世紀以来，結晶学や分子構造，さらには原子構造や素粒子論への応用が盛んで，表現論はむしろ数学外の関心のほうが高かったといえる．

理論の発展よりも応用からの要求のほうが急だったせいか，近年に至るまで表現論だけの成書というものはなかった．そのため，表現論の名著というものは見当たらない．もちろん，表現論を扱っている名著ならばある．が，表現論を扱うにはかなりの準備が必要で，後半にならないと表現論が出てこないことが多い．

表現論が展開される群には大きく分けて，有限群とリー群がある．有限群の表現にしても，まず有限群の基礎知識が必要で，例えば M. ホールの『群論』（榎本他訳）吉岡書店（1969）でも，表現は終章近くにならないと登場しない．表現にできるだけすぐに触れたければ，J.-P. セールの『有限群の線型表現』（岩堀，横沼訳）岩波書店（1974）が簡明で良い．その第 1 章は理論化学者の実用に供し得るように書いたとあり，発展途上の表現論が応用を強く意識していたことが窺われる．

量子力学への応用としては，ワイルの『群論と量子力学』（山内恭彦訳）裳華房（1932）が古典だが，日本語が古くて読みにくい．

リー群論といえば，シュヴァレー『リー群論』（齋藤正彦訳）ちくま学芸文庫（2012）とポントリャーギン『連続群論』（柴岡，杉浦，宮崎訳）岩波書店（1957, 1958）があげられる．ともに我々の世代の青春の書であり，精読に値する．位相群を深く調べることでリー群に行きつき，表現論を用いてコンパクト・リー群の分類までがある．後者に述べられているポントリャーギン双対性は，後に淡中忠郎によりアーベル群でないコンパクト群に拡張され，さらに辰馬伸彦により局所コンパクト群にまで拡張された．その辰馬による『位相群の双対定理』紀伊國屋書店（1994）は少し手強いかもしれない．

また，リー群一般でなく，個別に重要な群の表現を具体的に知っておくことも大切なことで，ランクの小さい群ながら，一般論的な視野を持ちつつ，リー環との関係も含めて表現を丁寧に紹介してある山内恭彦，杉浦光夫『連続群論入門』培風館（1960）は，長い間日本語での唯一の表現論の入門書であった．

リー群は対応するリー環の簡約，半単純，単純，可解，ベキ零，可換などという代数的性質により分けられ，また，定義体が実数か複素数かによっても大きく異なり，それ以外の体の場合は代数群として位置づけられ，その表現論は特に整数論において大きな役割を果たすことになる．

まずはリー環の表現というなら，日本語ではないが J.E. Humphreys の『Introduction to Lie algebras and representation theory』(Springer, 1973) が読みやすい．

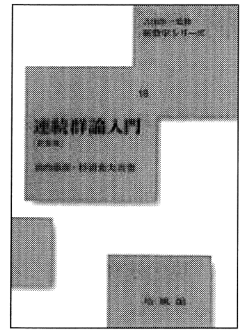
個別の群ならまずはワイルの『古典群—不変式と表現』丸善出版（2004, 2012）で，じっくり読む余裕があるなら是非にも読むと良いが，かなり手強い．ほかに，例外群の表現が具体的に詳しく書かれている横田一郎『群と表現』裳華房（1973）もある．ともに目的を持ってから手に取るほうがよいだろう．

半単純群の表現論は膨大な理論になっているが，ベキ零群の表現の軌道法も知っておくとよい．これには，藤原英徳『指数型可解リー群のユニタリ表現—軌道の方法』数学書房（2010）がある．

21 世紀になって，読み始めやすい 2 点の表現論の入門書が出た．右のページの下の 2 点である．こういう入門書が書かれたということは，日本の表現論研究の成熟を表す精華であると言ってよい．読み始めやすいとは言ったが，読み通しやすいわけではない．挫折しても，繰り返し挑戦してほしい．そうするだけの価値のある良書である．

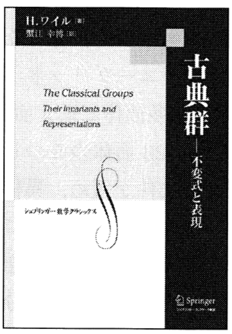
（かにえ・ゆきひろ，三重大学教育学部）

連続群論入門



山内恭彦，杉浦光夫著，新数学シリーズ，B6 判，200 頁，培風館（1960）
（新装版：A5 判，199 頁，本体 4500 円（2010））

素粒子論の役に立てるには回転群だけでは足らないという物理学者の要請で書かれた．リー群の一般論を踏まえながら，ローレンツ群，さらに $SU(2)$ と $SL(2)$ の表現が丁寧に述べられている．リー群とリー環との対応や，リー環の表現から作られるリー群の表現についても，具体的な計算を伴った解説がある．リー群の表現論の一般論を確認する例は本書の中で見つかるだろう．

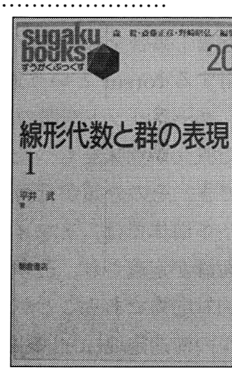


古典群 不変式と表現

ヘルマン・ワイル著，蟹江幸博訳，A5 判，423 頁，4800 円，丸善出版（2004, 2012）

群の不変式を求める個別な努力が，コンパクト群の行列表現に発展し，さらに一般のリー群の表現論へ向かうとき，線形代数の基礎づけを振り返り，古典群をはっきりした対象とし，それらの不変式を求めるという立場の中で，指標の理論を確立し，ワイルの指標公式などを導いたもの．ユニタリ・トリックの適用範囲での表現論，不変積分，双対性など，表現論のルーツがここにある．

線形代数と群の表現 I，II



平井武著，すうがくぶっくす 20, 21，A5 変形判，I：248 頁，本体 3900 円，II：304 頁，本体 4700 円，朝倉書店（2001）

大学の初年級の線形代数と微積分以外の予備知識は一切いらず，群の定義から始めて，多彩な群の例，表現論を考える理由から豊富な表現の例，ユニタリ表現，非ユークリッド幾何や力学，相対性理論，電磁気学，量子力学への多様な応用，最後には素粒子の坂田モデルまで行き着く．所々に，線形代数や微積分の表現論から見た振り返りが入る．これ一冊で表現論とは何かがわかる．

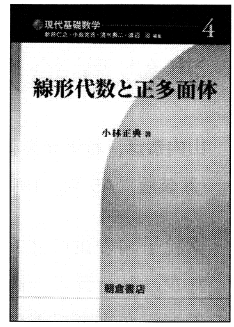


リー群と表現論

小林俊行，大島利雄著，A5 判，638 頁，本体 5100 円，岩波書店（2005.4）

線形代数と微積分を基礎知識としつつ，必要な知識は随所に丁寧な解説がある．位相群の表現論から始め，リー群・リー環・等質空間・同変ファイバー束を初歩から詳述．有限次元表現のカルタン・ワイル理論，ボレル・ヴェィユ理論を論じ，無限次元ユニタリ表現の構成の基本的考え方まで紹介．辞書のようにではなく，通読してほしいと著者は思っているし，じゅうぶんにそれは可能である．

線形代数と正多面体



小林正典著，A5 判，224 頁，本体 3300 円，朝倉書店

「現代基礎数学」シリーズ第 4 巻として刊行されている本書は，「線形代数の初歩を仮定して正多面体を論じるのがテーマ」の一冊である．同シリーズには他にも『多項式と計算代数』，『初等整数論と暗号』，『有限体と代数曲線』等，従来には見られなかった珍しい表題が並んでいる．中でも本書は，数学において最も古い対象である正多面体を正面から取り上げ現代的な光を当てており，存在価値の高い一冊となっている．

本書は全 15 章からなる．まず，線形代数の手法で扱える様々な構造をもつ空間とその幾何が数章にわたって簡潔に述べられる．内容はアフィン空間とアフィン写像（第 1 章と第 2 章），射影空間（第 3 章），ユークリッド空間（第 5 章と第 6 章），3 次元空間 $\boldsymbol{R}^3$ の単位球面 S^2（第 7 章）である．$\boldsymbol{R}^n$ の線形部分空間に“平行な”集合を部分アフィン空間といい，線形空間が作用する torsor という通常の定義は採らない．

ユークリッド空間の章では，距離や長さ，角度といった概念が意味をもつため，合同変換を導入することができ，その分類が行われている．第 4 章 1 次不等式と凸多面体では，アフィン空間内の凸多面体および凸多面錐が定義され，凸多面集合が連立 1 次不等式の幾何的対応物であることが示される（ミンコフスキー–ワイルの構造定理）．凸多面体の面や頂点などの重要概念もここで定義される．これらについてアフィン幾何を展開することで，直観的には明らかだが，基本的な結果「凸多面体 Δ の面や頂点は有限個であり，Δ はこれら頂点すべての凸包として得られる」などを厳密に証明できる．第 7 章では球面幾何が取り扱われる．$\boldsymbol{R}^3$ の原点を中心とする単位球面の図形は，図形および中心から作られる錐と，球面との交わりとみなせる．こうして S^2 上の図形の幾何が $\boldsymbol{R}^3$ 内の錐の幾何に，従って球面の幾何を線形空間の幾何に帰着できる．この考え方は第 14 章の $SO(3)$ の有限部分群の分類の際に重要な役割を果たす．

群の作用が“対称性”の抽象的表現であることを具体例を用いて説明した短い章を挿んで，第 9 章から第 13 章では，群，群の作用，準同型，軌道と固定群について，要領よくまとめられている．有限群の基本的なシローの定理（第 12 章）や，有限生成アーベル群の構造定理（第 13 章）までの群論の基礎的事項がほぼ網羅されており，群論の速習用テキストとして最適である．

最後の 2 章は本書で最も力点が置かれた部分となっている．第 14 章正多面体ではまずユークリッド『原論』最終巻の有名な定理「空間の正多面体は正 4 面体，立方体，正 8 面体，正 12 面体，正 20 面体の 5 つしかない」が証明される．ついで面の条件を緩め，異種の正多角形も許したアルキメデス–ケプラーの分類について考察する．さらに 5 種類の正多面体の運動群を決定した後，特殊直交群 $SO(3)$ の有限部分群 G の分類を行っている．$SO(3)$ を S^2 に作用する回転群と考えると，G に属するすべての回転（$\neq 1$）の軸と球面の交点の集合は G の作用する集合となる．このときの軌道に属する点の個数と配置を調べ上げ，次にそれらの点の凸包である凸多面体の形状を決定，この凸多面体の運動群として G を確定する．後半では $O(3)$ の有限部分群の分類が $SO(3)$ の場合のそれに帰着し述べられている．第 15 章は「合同群が旗推移的な凸多面体」という正多面体の現代的な定義をした後，一般次元でのこの正多面体の分類に進む．

全体を通して記述は懇切丁寧であり明快な筆致で書かれている．随所に載る図や表は内容の理解を容易にし，また，そのほとんどに完全に近い解答が付された演習問題（150 題）は自習するのに適したものとなっている．参考文献では専門的論文も含め 62 もの数が挙げられ，著者の強い意気込みが伝わってくる．より深く学びたい読者にとっても非常に役に立つだろう．読了後は線形代数や群論といった，いわゆる抽象数学の威力を十二分に味わい，その余韻に浸ることができる一冊となっている．本書によって読者は「広大な幾何の世界」と「幾何学の楽しみ」をともに知ることになるに違いない．

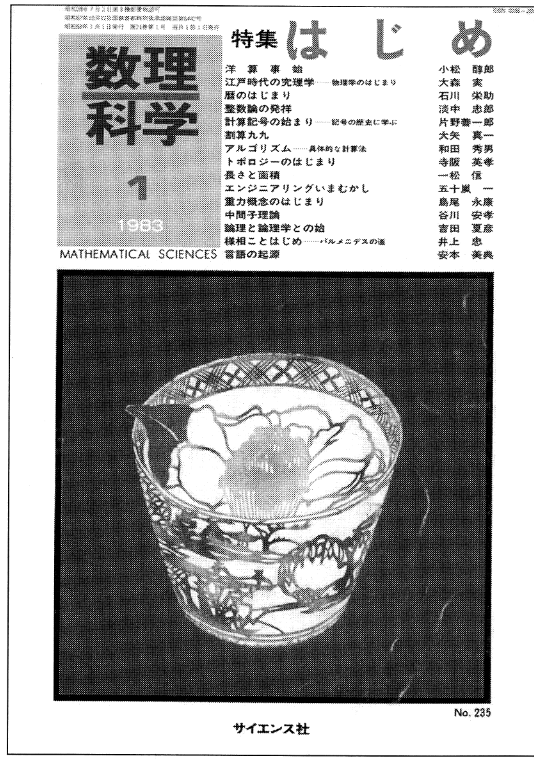
鈴 木　香 織（横浜国立大学経営学部）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

吉田 夏彦

1983年1月号



この30年の間の学問の発展はいちぢるしく，論理学もその例外ではない．しかし，小文の目的は，当時の論理学の状況を概観することではなく，古典に多少言及しながら，論証や論理学の発生について想像を述べることだつたので，論理学の発展には今度もふれないでいいであろう．むしろ，鸚鵡や類人猿に人間の言葉に似たものを使わせる研究が進んだことの方が，論理の発生に将来示唆が得られる希望を与えるものと思われるが，この種の研究の意義をあまり肯定的にみない人の方がまだ多いのが現状であるし，肯定するとしても，論証をおこなわせるところまでは研究が進んでいないのだから，こちらの話にもここでは立入らない．

かつては，「分類学は，学問の初期の段階で，法則定立の段階になつて初めてほんものの学問になる」などといわれたものだが，小文は，論理学の言葉が，数学や自然科学を分類学として発展させているという主張で終つている．この主張は今でも妥当であると考えている．ただし，博物学的な分類では，五感で得られる経験をそのまま述べた言葉もふんだんに使われるし，そのことの効用も大きいのだが，数理科学的な学問は，基本概念を論理的なものを含む少数のものにかぎるという禁欲的な態度をとることで新しい分類学となることに成功しているのである．

探査機が送つてくる情報も，この禁欲的な言葉で書かれていると思われるが，その一部は，視覚的な映像に翻訳されてテレビの番組に登場している．文科系の芸術家も，COMPUTERを自由につかいこなして作品を作る世の中である．その時，COMPUTERが「理解」できる言葉は畢竟この禁欲的な言葉だけなのだということはどれだけ意識されているのだろうか．

本誌の読者にとつては，30年前も今も，この禁欲的な言葉は親しいものであろう．しかし，猫も杓子もFORTRANやBASICでPROGRAMMEを書くことを覚えようとはげんだ時代は遠く去り，お仕着せのアプリを樂しむ人が多くなつた今，一般の人々は，黒子としての活躍の場を着々とひろげてきた論理的な言葉のことはあまり念頭にのぼせなくなつた．めまぐるしく交代している家電や端末の新製品は，いわゆるアナロク的な感性にどんどんすり寄つてきている．

そのことと関係があることなのか，論証に似て非なる言論がますます幅をきかせる傾向が出てきたように思われる．たとえば，感情に訴えて説得する弁論が人気をえている．地上をおおつている暴力沙汰も，この種の弁論にささえられているところがある．こういう世の中では論理の始に思を寄せる人も減つて行くのかも知れない．

（よしだ・なつひこ，東京工業大学名誉教授）

例題形式で探求する 微積分学の基本定理
関数の性質から幾何構造を探る
第1回

序論

森田 茂之

「微積分学の基本定理」(fundamental theorem of calculus) とは，1 変数関数の微分と積分との間の密接な関係を表す基本定理である．この定理は，現代数学において様々な形に一般化され，それによって一般の次元の空間や図形の大局的な構造を捉えたり，そこにおける現象の記述ができるようになった．この連載では，このような展開を，例題形式によって目に見える形で解説する．

まず，1 変数関数の微分と積分の復習から始め，2, 3 変数の場合を中心に多変数関数の微分 (偏微分)，積分 (多重積分)，およびグラフ等について，例を見ながら概観する．次に，2 次元すなわち平面，および 3 次元すなわち空間のベクトル解析の，豊富な例による解説を行う．ここでは，**線積分**や**面積分**，あるいは**ベクトル場**等の重要な概念が登場し，全体の中心的部分となる．したがって本連載はベクトル解析への入門講座と見ることもできる．これにより，微分形式の概念やドラム理論に至る，現代数学への道筋を示したい．

空間や図形の上の曲線 (道と呼ぶ場合も多い) の全体を考えることは，現代数学において基本的に重要である．そこから，基本群 (fundamental group) やループ空間 (loop space) と呼ばれる概念が生まれ，極めて重要な役割を果たしている．連載の終わりの部分ではこのことも念頭にして，基本群の非可換性，およびループ空間を初めとする無限次元空間の構造の探求を，読者に垣間みてもらうことにしたい．

1.1 1 変数関数の微分と積分

まず，本連載で使う記号や用語を統一するためにも，1 変数関数の微分と積分について，簡単に復習することから始めよう．連載全体を通じて，定評のある教科書[1,2]を参考文献に挙げておく．

実数の全体を $\mathbb{R}$ と書く．$\mathbb{R}$ の開集合 U 上で定義された実数値関数

$$f : U \to \mathbb{R}$$

が与えられているとする．点 $a \in U$ に対し，極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するとき，f は a で**微分可能**であるという．このとき上記の極限値を $f'(a)$ と書き，これを f の a における微係数という．U 上の各点で微分可能な関数を微分可能な関数という．このとき各点における微係数を考えることにより，f の**導関数** $f'(x)$ が定義される．$\frac{df}{dx}$ と書く場合もある．導関数が連続である関数を C^1 級関数という．$f'(x)$ が微分可能ならば，その導関数が定義される．これを $f''(x)$ あるいは $f^{(2)}(x)$ と書き，f の 2 階の導関数と呼ぶ．$\frac{d^2 f}{dx^2}$ と書く場合もある．これを繰り返すことにより，一般に r 階の導関数 $f^{(r)}(x)$ が定義される．$f^{(r)}(x)$ が存在し，それが連続となるような関数を C^r 級関数という．何回でも微分可能な関数を C^∞ 級関数という．滑らかな関数（smooth function）と呼ぶことも多い．

次に積分可能性の定義を述べる．$\mathbb{R}$ の有界閉区間 $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

が与えられているとする．I 上にいくつかの分点

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{k-1} < b = a_k$$

を取れば，これらは I の小区間 $[a_{i-1}, a_i]$ による分割 Δ を定める．

$$|\Delta| = \max_{i=1,\cdots,k} (a_i - a_{i-1})$$

とおき，これを分割の細かさと呼ぶ．各小区間 $[a_{i-1}, a_i]$ 上に任意に点 $p_i \in [a_{i-1}, a_i]$ を取れば，和

$$\sum_{i=1}^{k} f(p_i)(a_i - a_{i-1})$$

が定まるが，これをリーマン和と呼ぶ．もし，極限値

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(p_i)(a_i - a_{i-1})$$

が存在し，それが点 p_i の取り方によらず一定であるとき，f は I 上（リーマンの意味で）**積分可能**であるという．このとき

$$\int_a^b f(x)dx = \text{上記の極限値}$$

と書く．$\int_a^b f(x)dx$ をリーマン積分という．

ここでは事実を書くだけにするが，

有界閉区間上の任意の連続関数は積分可能である

というのが大学初年級の積分法で初めに学ぶ基本的な定理である.

微積分学は，17 世紀にニュートンとライプニッツにより独立に基礎が確立された．現在使われている上記のような微分と積分の厳密な定義を並べると，どちらも極限を取る操作を含んでおり，概念としての難しさに大きな差はないように思えるかもしれない．もしかすると，積分の定義のほうがより難しく感じられるかもしれない．しかし，良く知られているように積分の考えはギリシャ時代にまで遡り，歴史的にもずっと早くから登場している．それは，積分が長さ，面積，体積といった眼に見える量と直接関連し，厳密な定義を待たなくても実際の計算が可能であったことによる.

1.2 微積分学の基本定理

次に，本連載の柱となる「微積分学の基本定理」を述べよう．一般に，$\mathbb{R}$ の開集合 U 上で定義された実数値関数 $f:U\to\mathbb{R}$ に対し，$G'(x)=f(x)$ となるような関数 G を f の原始関数という．また，f が積分可能であるとき $a\in U$ を固定し

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx \quad (x\in U)$$

により定義される関数 F を f の不定積分という.

以上の準備の基に基本定理を述べる.

定理 1.1（**微積分学の基本定理**） $f:U\to\mathbb{R}$ を実数直線 $\mathbb{R}$ の開集合 U 上で定義された連続関数とする．このとき f の原始関数 $G(x)$ は

$$G(x)=\int_{a_0}^x f(x)dx+C \quad (a_0\in U, C \text{ は定数})$$

の形で与えられる．さらに，任意の $a,b\in U$ に対し，等式

$$\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)$$

が成立する.

この定理を一言でいえば，微分と積分が互いに逆の演算であることを示している．この定理を，実質的に同等であるが，一般化をする場合に都合の良い次の形に言い換えておく．初めに微積分学の基本定理の様々な一般化と述べたが，それは次の定理 1.2 の形を念頭においたものである.

定理 1.2（**微積分学の基本定理，言い換え**） 実数直線 $\mathbb{R}$ の開集合 U 上で定義された C^1 級関数 $f:U\to\mathbb{R}$ が与えられているとする．このとき，任意の $a,b\in U$ $(a<b)$ に対し，等式

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$$

が成立する.

1.3 一般化の考察

定理 1.2 の一般化として，どのような形があり得るかを考えてみよう．まず手始めに，この定理に分かり易い一つの意味をつけ，その一般化として図 1.1 のような平面上の曲線（平面曲線という），あるいは図 1.2 のような空間内の曲線（空間曲線という）の長さの公式が得られることを見る．

定理 1.2 において，変数 x を時間 t に替え，$f(t)$ は $\mathbb{R}$ 上を運動している質点の時間 t のときの位置を表すものとする．このとき $f'(t)$ は時間 t のときの質点の速さを表す．したがって，定理 1.2 の左辺の積分は，時間 t が a から b に経過する間の速さの積分である（ただし，$f'(t)$ が負の場合は速さも負と考えることにする）．一方右辺の値は，その間に質点が移動した距離を表す．この両者が等しいというのが定理の主張であるが，これは

$$\text{速さの積分} = \text{到達距離} \tag{1.1}$$

という当然成り立つべき等式となる．

この考えを図 1.1 あるいは図 1.2 のような曲線 C に適用するために，次のように t をパラメータとしたパラメータ表示をする．

$$C = \{(u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2; t \in [a, b]\}, \quad C = \{(u(t), v(t), w(t)) \in \mathbb{R}^3; t \in [a, b]\}.$$

曲線 C は区分的に C^1 級であることを仮定する．すなわち t の関数 u, v, w はすべて連続で，有限個の点を除き C^1 級であり，u', v' あるいは u', v', w' が同時に 0 になることはないとする．

例題 1.1　曲線 C の長さ $l(C)$ を与える公式を導け．

解答　質点が平面上あるいは空間内を，時間 t が a から b まで経過する間運動し，その軌跡が C となっていると考える．このとき，パラメータ表示の速度ベクトルは

$$(u'(t), v'(t)) \in \mathbb{R}^2, \quad (u'(t), v'(t), w'(t)) \in \mathbb{R}^3 \quad (t \in [a, b])$$

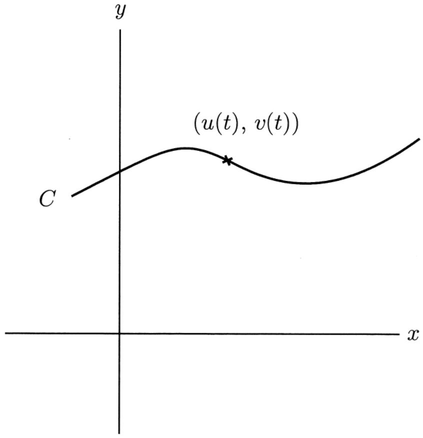


図 1.1　平面曲線．

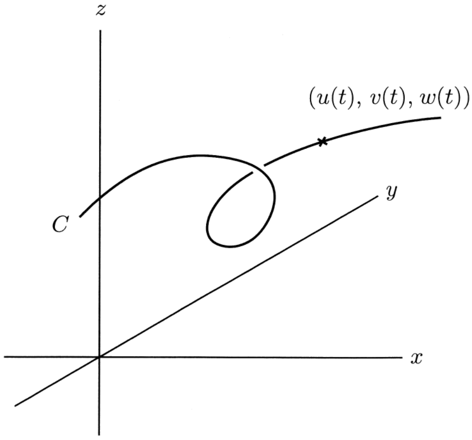


図 1.2　空間曲線．

により与えられる．速度ベクトルの大きさが速さであるから，それは

$$\sqrt{u'(t)^2+v'(t)^2}, \quad \sqrt{u'(t)^2+v'(t)^2+w'(t)^2}$$

と書ける．したがって，(1.1) の考えを今の場合に直接適用すれば

$$l(C)=\int_a^b \sqrt{u'(t)^2+v'(t)^2}\,dt, \quad l(C)=\int_a^b \sqrt{u'(t)^2+v'(t)^2+w'(t)^2}\,dt \tag{1.2}$$

となる．

上記の等式 (1.2) は，パラメータ表示された曲線の長さを表す良く知られた公式である．

例題 1.2　放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $(0,0),(1,1)$ の間にある部分の長さを求めよ．

解答　放物線上の与えられた部分 C を，$C=\{(t,t^2);t\in[0,1]\}$ とパラメータ表示する．公式 (1.2) により，求める長さ l は

$$l=\int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,dt$$

となる．ここで不定積分の公式

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)$$

を思い出そう．一般にこのような場合，何かの理由で答えが分かれば，右辺の関数の微分が左辺の被積分関数に一致することさえ確認すればよい．これが微積分学の基本定理の威力の一つである．問題に戻り，上記において $x=2t$ を代入すれば，求める答え

$$l=\left[\frac{1}{4}\left(2t\sqrt{4t^2+1}+\log\left|2t+\sqrt{4t^2+1}\right|\right)\right]_0^1=\frac{1}{4}\left(2\sqrt{5}+\log\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$$

が得られる．

1.4 線積分と曲線の長さ

微積分学の基本定理の一つの解釈から，曲線の長さの公式 (1.2) を導いた．しかし，これは曲線のパラメータ表示を直接使った式で，曲線自身の言葉で書けていない．より内在的な視点を与えるのが次に述べる線積分の概念である．

C を前節に記したような区分的に C^1 級の曲線とする．簡単のために C は平面曲線とするが，空間曲線あるいはもっと一般に $\mathbb{R}^n$ の中の曲線に対しても同様に定義される．C を含む開集合 U 上で定義された実数値連続関数 $f:U\to\mathbb{R}$ が与えられたとき，f の C に沿う線積分

$$\int_C f\,ds$$

を次のように定義する．C が x-軸上の有界閉区間 $I=[a,b]$ の場合には，この

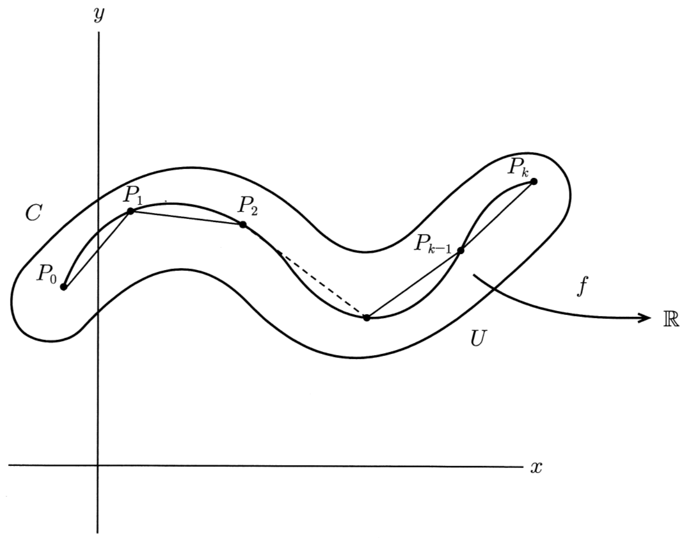


図 1.3　線積分.

定義は通常のリーマン積分 $\int_a^b f(x)dx$ の定義に一致するのであるが，それを確認しながら読むとよいだろう．t を変数とする有界閉区間 $I=[a,b]$ 上に，前述のようにいくつかの分点

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{k-1}<b=t_k$$

を取って分割 Δ を作る．$P_i=(u(t_i),v(t_i))\in C\ (i=0,1,\cdots,k)$ とおけば，これらは C 上の分点となる（図 1.3 参照）．

$$s_i=d(P_{i-1},P_i)\quad (d \text{ は 2 点間の距離を表す})$$

とし

$$\int_C f ds=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(P_i)\,s_i \tag{1.3}$$

と定義するのである．右辺が収束することは，有界閉区間上の連続関数が積分可能であることと，ほぼ同様にして証明することができる．明らかに

$$\int_C 1\,ds=l(C)$$

となるはずだが，むしろこれが曲線の長さの定義である．ただし 1 は恒等的に 1 を値に取る定数関数を表す．

上記の定義式 (1.3) において，s_i の部分を次のように替えることにより，線積分のいくつかの“変種”ができる．これらはいずれも重要なものであるが，一次微分形式の概念を導入すれば，すべてが統一される．まず C に一つ向きを指定し，パラメータ表示はいつも t が増大する方向が C の向きに一致しているように取るものとする．このとき

$$\int_C f dx = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(P_i)\,(u(t_i) - u(t_{i-1})), \tag{1.4}$$

$$\int_C f dy = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(P_i)\,(v(t_i) - v(t_{i-1})) \tag{1.5}$$

と定義し，上を f の C に沿う“x 方向の”線積分，下を f の C に沿う“y 方向の”線積分と呼ぶ．空間曲線の場合にはこれに加えて“z 方向の”線積分も定義される．

定理 1.3（線積分のパラメータ表示による計算） パラメータ表示された曲線 C に沿う線積分に対し，次が成立する．

$$\int_C f dx = \int_a^b f(u(t), v(t))u'(t)\,dt,$$
$$\int_C f dy = \int_a^b f(u(t), v(t))v'(t)\,dt,$$
$$\int_C f ds = \int_a^b f(u(t), v(t))\sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}\,dt.$$

ここで C の向きについて重要な注意がある．C に逆の向きを指定したものを $-C$ と書く．このとき

$$\int_{-C} f dx = -\int_C f dx, \quad \int_{-C} f dy = -\int_C f dy$$

と積分も符号が変わるが，初めの線積分については

$$\int_{-C} f ds = \int_C f ds$$

と値は変わらない．

例題 1.3 単位円 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ に時計と反対回りの向きを付けておく．このとき，次の二つの線積分を計算せよ．

$$\int_{S^1} x dy, \quad \int_{S^1} y dx.$$

解答 単位円を $\{(\cos t, \sin t); t \in [0, 2\pi]\}$ とパラメータ表示しておく．このとき定理 1.3 により

$$\int_{S^1} x dy = \int_0^{2\pi} \cos t(\sin t)' dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \pi,$$
$$\int_{S^1} y dx = \int_0^{2\pi} \sin t(\cos t)' dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - 1)\,dt = -\pi$$

となる．

ここで読者は，単位円の向きと積分の符号について注意深く観察してほしい．さらに，単位円以外の向き付けられた単純閉曲線を自分で選び，それについて

も上記の線積分を計算してみるとよいだろう．ただし，自分自身と交わらない閉じた曲線を単純閉曲線という．

線積分については今はこれで終わりにしておくが，何回か後の記事で，この先の展開を取り上げることにする．そこでは，上記例題1.3の線積分の幾何学的意味が明らかになる．

1.5 一般化の考察—続き—

基本定理1.2の一般化の考察を，もう少しだけ続ける．左辺は，まずは f の導関数 f' の有界閉区間 $I=[a,b]$ 上の積分という意味であり，記号 dx は $\int$ と対を作って，x に関するリーマン積分を表す言わば単なる印である．この見方を変えて，f' と dx を一体化した $f'dx$ を一つのものと見なす．さらに f の（全）微分 df を $df=f'dx$ と定義する．このとき左辺は df を I 上で積分したものと解釈できる．これを $\int_I df$ と表す．

この微積分学（解析学）的な視点に，次のような幾何学的な視点を加える．有界閉区間 $I=[a,b]$ の境界 ∂I を

$$\partial I=(b)-(a)$$

と定義する．ただし (b) は b を点とみなしたことを表す記号である．また $-(a)$ は a を点とみなしたものに符号 $-$ を付けたものを表す．そして関数 f の ∂I 上の“積分”を

$$\int_{\partial I} f=f(\partial I)=f((b)-(a))=f(b)-f(a)$$

と定義する．

以上の言葉の準備の基に，基本定理1.2の主張は

$$\int_I df=\int_{\partial I} f$$

という美しい式となる．いまのところは，形式的に整っているだけではないか，と思われるかも知れない．しかし，この形から一般化の方向が見えてくる．まずは $\mathbb{R}$ の閉区間 I を平面曲線あるいは空間曲線に一般化する方向である．さらに進んで，今度は次元を上げて，1次元の積分を多重積分に，また1次元の図形である曲線を高次元の図形に一般化する方向である．これらは実際に実現されて，**ストークスの定理**という基本定理に結実する．本連載の一つの目的は，2, 3次元の場合を中心に，このような一般化がなされる過程に読者を案内することである．

参考文献

1) 高木貞治，『解析概論』，改訂第3版，岩波書店，1983.
2) 杉浦光夫，『解析入門 I, II』，東京大学出版会，1980, 1985.

（もりた・しげゆき，東京大学・東京工業大学名誉教授）

クラスタリングの情報幾何

画像の分類，検索，認識

甘利 俊一

世の中に情報はあふれている．画像を例に挙げるならば，多数の画像がデータベースに納まっていてウェブで利用可能である．画像信号をカテゴリ毎に分類し，各カテゴリの代表画像を作成しておくと便利である．カテゴリとして似た者どうしをひとまとめにするのがクラスタリングであり，まとめた信号の集まりをクラスタと呼ぶ．クラスタは大分類から小分類まで，階層的に構成されてよい．

クラスタが形成できているときに，画像が一つ与えられれば，これがどのクラスタに属するかを判定することができる．これが画像検索である．いまや，膨大な画像のデータベースを高速で検索をする必要がある．クラスタが一つのカテゴリに対応すれば，これは画像がどのカテゴリに属するかを判定するパターン認識の問題でもある．

信号はいろいろに表現できる．画像ならば，画素ごとに明るさ（色も含めて）を成分とする画像ベクトルとしてよい．画像から特徴を多数測定し，特徴の集まりを画像ベクトルとすることもあろう．また，画像をスペクトル分解し，その成分を集めて特徴としてもよい．一つの画像信号を n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ で表現しよう．このとき，信号の空間 $X=\{\boldsymbol{x}\}$ をユークリッド空間，$\boldsymbol{x}$ はそのベクトルと考えることが多いが，そうではなくて，X には幾何構造に基づくダイバージェンスが別に導入されると考えるのも自然である．ダイバージェンスは確率構造から自然に導かれることもある．$\boldsymbol{x}$ の成分がすべて非負であるとき，これを規格化して確率分布と見たり，直接に正測度と見て，確率分布空間や正測度空間に導入される色々なダイバージェンスを用いることもできる．

今回はクラスタリングと検索にまつわる情報幾何を議論しよう．なお，画像信号は，サイズ合わせや位置合わせのように，変換に関する不変性に基づいて規格化する必要があるが，それは別に行うこととし，ここではふれない．

通常のクラスタリングをハードクラスタリングと呼び，一つの $\boldsymbol{x}$ は一つのク

ラスタ（カテゴリ）に属する．本稿では，$\boldsymbol{x}$ が複数のカテゴリに属して良いこととし，その度合いを確率で表すクラスタリングをソフトクラスタリングと呼ぶ．このとき，各カテゴリ毎にそこから発生する信号の確率分布を定め，信号 $\boldsymbol{x}$ がどのカテゴリに属するかを確率的に決める．これは事後確率分布である．パターン認識はこの立場を取ることが多い．

19.1 クラスタの中心

信号の空間 $X=\{\boldsymbol{x}\}$ に，凸関数 ϕ が定義され，ここから 2 点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ の間に Bregman ダイバージェンスが導入されるとしよう．これを

$$D_{\phi}\left[\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}'\right]=\phi(\boldsymbol{x})-\phi\left(\boldsymbol{x}'\right)-\nabla\phi\left(\boldsymbol{x}'\right)\cdot\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\right) \tag{19.1}$$

と書く．凸関数 ϕ が定義された空間は双対平坦の幾何構造を持ち，ここに 2 つの双対なアファイン座標系が導入される．すなわち，アファイン座標系と双対アファイン座標系であり，双対の凸関数 ϕ と ψ とが定義される．

あとで指数型確率分布族を導入するので，それとの整合性から，X の要素 $\boldsymbol{x}$ を表すのに座標系 $\boldsymbol{\eta}$ を用い，これを X の双対アファイン座標系と考える．$\boldsymbol{x}$ 点の座標は $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{x}$ である．一方，X のアファイン座標系を $\boldsymbol{\theta}$ と書く．$\boldsymbol{\theta}$ は $\boldsymbol{\eta}$ と Legendre 変換で結ばれ，

$$\boldsymbol{\theta}=\nabla\phi(\boldsymbol{\eta})=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}\phi(\boldsymbol{\eta}). \tag{19.2}$$

この両方の座標系を併用すると都合が良い．

ここで，X に N 個の要素からなるクラスタ（信号の集合）$S=\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_N\}$ が与えられたとしよう．この集合に代表点を一つ定めたい．代表点はどの点から見ても遠くないのが良い．そこで，X の点 $\boldsymbol{\eta}$ を取り，これが集合 S とどのくらい離れているかを，ダイバージェンス $D_{\phi}\left[\boldsymbol{x}_i:\boldsymbol{\eta}\right]$ の平均値

$$D_{\phi}[S:\boldsymbol{\eta}]=\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{x}_i\in S}D_{\phi}\left[\boldsymbol{x}_i:\boldsymbol{\eta}\right] \tag{19.3}$$

で定める．これを最小にする点 $\boldsymbol{\eta}_S$ を S の ϕ 中心と呼ぶ．これは，S の各点から $\boldsymbol{\eta}_S$ へのダイバージェンスの和を最小にする点である．ϕ 中心は簡単に求まる．

定理 19.1　信号集合 S の ϕ 中心は，凸関数 ϕ によらず

$$\boldsymbol{\eta}_S=\frac{1}{N}\sum\boldsymbol{x}_i \tag{19.4}$$

で与えられる[*1)]．

証明　(19.3) を $\boldsymbol{\eta}$ で微分すれば

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}D[S:\boldsymbol{\eta}]=\frac{1}{N}\sum G^{-1}(\boldsymbol{\eta})\left(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{\eta}\right), \tag{19.5}$$

*1)　S と $\boldsymbol{\eta}$ とのダイバージェンスを双対 $D_{\phi}[\boldsymbol{\eta}:S]$ で定義すれば，S の双対中心は，$\boldsymbol{x}_i$ と $\boldsymbol{\eta}$ のアファイン座標をそれぞれ $\boldsymbol{\theta}_i,\boldsymbol{\theta}$ として $\boldsymbol{\theta}_S=(1/N)\sum\boldsymbol{\theta}_i$ で与えられる．

$$G^{-1}(\boldsymbol{\eta}) = \nabla\nabla\phi(\boldsymbol{\eta}). \tag{19.6}$$

$G^{-1}(\boldsymbol{\eta})$ は正定行列であるから，$\nabla D_\phi[S:\boldsymbol{\eta}]=0$ より (19.4) が得られる．ユークリッド距離に限らず，任意の Bregman ダイバージェンスで，双対アファイン座標系を用いると，S の中心は S の点の平均として求まる．

話を少し一般化して，N 個の点が与えられるのではなく，信号 $\boldsymbol{x}$ の確率分布 $p(\boldsymbol{x})$ が与えられたとしよう．この分布の中心は

$$D_\phi[p:\boldsymbol{\eta}] = \int D_\phi[\boldsymbol{x}:\boldsymbol{\eta}]p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \tag{19.7}$$

を最小にする $\boldsymbol{\eta}$ である．同様の計算によって中心が

$$\boldsymbol{\eta}_p = \int \boldsymbol{x}p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \tag{19.8}$$

であることが分かる．

19.2 クラスタリング

N 個の要素からなる信号の集合 S が与えられたときに，全体の中心を求めるのではなくて，これを近い者どうしまとめて，m 個の部分集合に分割したい．その一つ一つをクラスタと呼ぶ．ここでは m は固定して考える（いくつに分けるかもデータに依存する大きな問題であるが，ここでは論じない）．m 個のクラスタを $C=\{C_1,\cdots,C_m\}$ で表し，それらの中心を $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$ とする．また，各 $\boldsymbol{x}_i$ は，そこから各クラスタまでのダイバージェンス $D_\phi\left[\boldsymbol{x}_i:\boldsymbol{\eta}_h\right]$, $h=1,\cdots,m$ を計って，一番近いクラスタに入れるものとする．このとき，各クラスタ C_h に属する信号からその中心までのダイバージェンスの和を

$$D[C:S] = \sum_h \sum_{\boldsymbol{x}_i\in C_h} D\left[\boldsymbol{x}_i:\boldsymbol{\eta}_h\right] \tag{19.9}$$

とする．ただし，$\boldsymbol{x}_i \in C_h$ とは

$$\arg\min_k D\left[\boldsymbol{x}_i:\boldsymbol{\eta}_k\right] = \boldsymbol{\eta}_h, \tag{19.10}$$

すなわち，$\boldsymbol{x}_i$ に一番近いところにある中心が $\boldsymbol{\eta}_h$ であることを意味する．このとき，総和 (19.9) を最小にするようにクラスタ中心 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$ を定めたい．各 $\boldsymbol{x}_i$ のクラスタ分けは $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$ から自動的に出る．

クラスタリングのアルゴリズムは，k 平均法として良く知られているが，これはユークリッド距離でなく一般のダイバージェンスの場合にも適用できる[1)]．

クラスタリングアルゴリズム

1. 初期段階：初めに m 個のクラスタ中心 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$ を互いに異なるように勝手に選ぶ．ランダムに選んでよい．

2. 分類段階：S の各要素 $\boldsymbol{x}_i$ を順番に取り上げ，これがどのクラスタ中心に一番近いかを計算し，一番近いクラスタ C_h に入れる．

$$\boldsymbol{x}_i \in C_h : D_\phi[\boldsymbol{x}_i : \boldsymbol{\eta}_h] = \min_k \{D_\phi[\boldsymbol{x}_i : \boldsymbol{\eta}_k]\} \tag{19.11}$$

3. 更新段階：各信号がどのクラスタに属するかが定まった後に，その構成員の平均として各クラスタ C_h の中心を求め，これを更新したクラスタ中心 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$ とする．

4. 終了段階：上記を繰り返し，収束した時点で終了する．

これはよく知られたアルゴリズムであり，有限のステップで最良の解に収束することが，容易に証明できる．

19.3 分類，検索，ボロノイ図

多数のデータがあるときに，それをクラスタ分けし，クラスタ中心を求めたとしよう．各クラスタはカテゴリを形成すると考える．画像ならば，動物，植物，人物，風景などが大分類のカテゴリになる．各カテゴリはさらに細かく分類されてよい．これは階層的に形成される．新しい信号（画像）が与えられたときに，これがどのクラスタに属するかを調べることは，これを既存のカテゴリに分類することである．また，一つの信号が与えられたときに，それと同じものまたは類似したものがどこにあるかを調べる情報検索は，ここから各クラスタ中心へのダイバージェンスを求めこれを比較することで容易に行える．クラスタ分けが，大分類からより細かい小分類まで階層的にできていれば，検索も階層的にできる．

初めに，中心 $\boldsymbol{\eta}_1$ と $\boldsymbol{\eta}_2$ を持つ 2 つのクラスタ C_1 と C_2 があったときに，与えられた信号 $\boldsymbol{x}$ がどちらに属するかを考えよう．X を 2 つの領域 R_1, R_2 に分割し，その境界を B_{12} とする（図 19.1）．領域 R_1 の属する $\boldsymbol{x}$ は，$D_\phi[\boldsymbol{x} : \boldsymbol{\eta}_1] < D_\phi[\boldsymbol{x} : \boldsymbol{\eta}_2]$ で $\boldsymbol{\eta}_1$ に近く，R_2 では逆であるとする．境界上の信号 $\boldsymbol{x}$ は

$$D_\phi[\boldsymbol{x} : \boldsymbol{\eta}_1] = D_\phi[\boldsymbol{x} : \boldsymbol{\eta}_2] \tag{19.12}$$

を満たす．そこで超曲面 B_{12} を求めよう．$\boldsymbol{\eta}_1$ と $\boldsymbol{\eta}_2$ とを双対測地線で結ぶ．その中点として，

$$D_\phi[\boldsymbol{\eta}_{12} : \boldsymbol{\eta}_1] = D_\phi[\boldsymbol{\eta}_{12} : \boldsymbol{\eta}_2] \tag{19.13}$$

を満たす点 $\boldsymbol{\eta}_{12}$ を指定し，この点で双対測地線を垂直によぎる平坦な超平面を考えよう（図 19.1）．ピタゴラスの定理から，この超平面 B_{12} 上の点 $\boldsymbol{x}$ について

$$D_\phi[\boldsymbol{x} : \boldsymbol{\eta}_i] = D_\phi[\boldsymbol{x} : \boldsymbol{\eta}_{12}] + D_\phi[\boldsymbol{\eta}_{12} : \boldsymbol{\eta}_i], \quad i = 1, 2 \tag{19.14}$$

が成立する．すなわち，$D_\phi[\boldsymbol{x} : \boldsymbol{\eta}_1] = D_\phi[\boldsymbol{x} : \boldsymbol{\eta}_2]$ である．

定理 19.2　2 つのクラスタ C_1 と C_2 を分ける境界面 B_{12} は，双方の中心を結ぶ双対測地線の中点から垂直に立てた測地超平面である．

平坦な超平面は $\boldsymbol{\theta}$ 座標で表したときに線形に書ける．これは $\boldsymbol{\eta}$ 座標で表せ

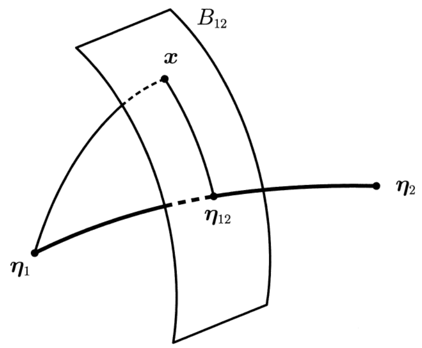


図 19.1　2 つのクラスタ中心を分割する $\boldsymbol{\theta}$ 座標の超平面 B_{12}.

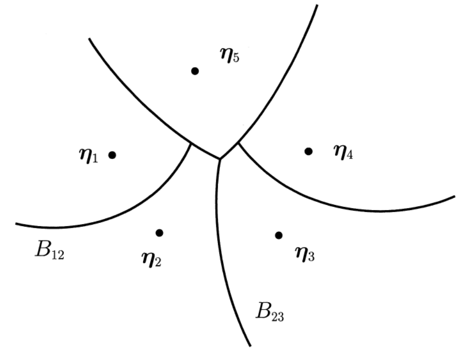


図 19.2　$\boldsymbol{\theta}$-平坦超平面を用いたボロノイ図.

ば曲面になる．凸関数 ϕ が

$$\phi(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2}\sum \eta_i^2 \tag{19.15}$$

のとき，空間はユークリッド的になり，$\boldsymbol{\theta}$ 座標と $\boldsymbol{\eta}$ 座標は一致する．このとき，B_{12} は $\boldsymbol{\eta}_1$ と $\boldsymbol{\eta}_2$ とを結ぶ直線に直交する超平面になる．これが通常のユークリッド空間における分類である．ϕ ダイバージェンスを用いたクラスタリングと分類，検索はこれを一般化したものであるが，空間がユークリッド的でないため，$\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{\eta}$ 座標を用いて表現することになる．

多数のクラスタがあるとき，空間 X を分割して，領域 R_h を C_h の中心に近い点の集まりになるようにしたい．このときの空間の分割をボロノイ図と呼ぶ．2 つのカテゴリ C_i と C_j の境界面は

$$D_\phi\left[\boldsymbol{x}:\boldsymbol{\eta}_i\right] = D_\phi\left[\boldsymbol{x}:\boldsymbol{\eta}_j\right] \tag{19.16}$$

を満たすから，ボロノイ図は平坦な超平面

$$B_{ij} = \left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,D_\phi\left[\boldsymbol{x}:\boldsymbol{\eta}_i\right] = D_\phi\left[\boldsymbol{x}:\boldsymbol{\eta}_j\right]\right\} \tag{19.17}$$

で囲まれた領域からなる（図 19.2）．一般のダイバージェンスを用いたボロノイ図を求めるアルゴリズムも良く研究されている[2)]．

19.4 ダイバージェンスと指数型分布族

信号の空間 $X = \{\boldsymbol{x}\}$ 上に凸関数 $\phi(\boldsymbol{x})$ が定義されているとしよう．信号の確率分布との整合性を保つために，座標系 $\boldsymbol{\eta}$ を双対アファイン座標系とし，さらにその双対を導入し，これをアファイン座標系 $\boldsymbol{\theta}$ とした．X には 2 つのアファイン座標系が入り，$\boldsymbol{\theta}$ に対応するポテンシャル関数は Legendre 双対性から得られる $\psi(\boldsymbol{\theta})$ である．$\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{\eta}$ とは Legendre 変換で結ばれているから，

$$\boldsymbol{\theta} = \nabla\phi(\boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{\eta} = \nabla\psi(\boldsymbol{\theta}) \tag{19.18}$$

である．

X に導入されたダイバージェンスは，$\boldsymbol{\theta}$ 座標を用いれば 2 点 $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$ の間で

$$D_\psi[\boldsymbol{\theta}_1 : \boldsymbol{\theta}_2] = D_\phi[\boldsymbol{\eta}_2 : \boldsymbol{\eta}_1] \tag{19.19}$$

である．ダイバージェンスを ϕ で定義するか ψ で定義するかで，変数の順序が違ってくるものの，両者は基本的に同じものである．

凸関数は指数型分布族と密接に関係する．いま，$\boldsymbol{\theta}$ を自然座標系とする指数型分布族

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \exp\{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{x} - \psi(\boldsymbol{\theta})\} \tag{19.20}$$

を考えよう．$\psi(\boldsymbol{\theta})$ がキュミュラント母関数で凸関数である．(19.20) の確率密度関数はある基礎となる測度 $\mu(\boldsymbol{x})$ に関するものと考える．このとき，双対アファイン座標は $\boldsymbol{x}$ の期待値

$$\boldsymbol{\eta} = E_{\boldsymbol{\theta}}[\boldsymbol{x}] \tag{19.21}$$

である．双対アファイン座標で表した 2 つの点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を考えると，双対ダイバージェンス $D_\phi[\boldsymbol{x}_1 : \boldsymbol{x}_2]$ が得られる．逆に凸関数 $\phi(\boldsymbol{\eta})$ から得られる双対ダイバージェンスをもとに，指数型分布族

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \exp\{-D_\phi[\boldsymbol{x} : \boldsymbol{\eta}] + \phi(\boldsymbol{x})\} \tag{19.22}$$

を作ることができる．次の定理は Banerjee らが導いた[1)]．

定理 19.3　指数型分布族と凸関数 ϕ から導かれるダイバージェンスは 1 対 1 に対応する．

すなわち，凸関数から導かれるダイバージェンスを論ずるとき，いつも基礎に指数型分布族が存在し，$\boldsymbol{x}$ はそこから得られるデータと考えてよい．

19.5 パターン認識とソフトクラスタリング

信号がいくつかのカテゴリに分かれ，一つのカテゴリ C_h の信号は確率分布 $p_h(\boldsymbol{x})$ に従うとしよう．ここで，確率分布は $p_h(\boldsymbol{x})$ は，$\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{\eta}_h$ へのダイバージェンスを用いて

$$p_h(\boldsymbol{x}) = \exp\{\phi(\boldsymbol{x})\}\exp\{-D_\phi[\boldsymbol{x} : \boldsymbol{\eta}_h]\} \tag{19.23}$$

と書けるとする．すなわち，確率は $\boldsymbol{\eta}_h$ を中心に分布し，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{\eta}_h$ から離れるにつれ小さくなる．

定理 19.4　カテゴリ $C_h, h = 1, \cdots, m,$ の確率分布は，$\boldsymbol{\theta}_h$ を $\boldsymbol{\eta}_h$ に対する座標として指数分布族

$$p_h(\boldsymbol{x}) = \exp\{\boldsymbol{\theta}_h \cdot \boldsymbol{x} - \psi(\boldsymbol{\theta}_h)\} \tag{19.24}$$

を構成する．

証明　計算によって

$$D_\phi[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}] = \phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{\eta}) - \nabla\phi(\boldsymbol{\eta}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\eta}) = \phi(\boldsymbol{x}) + \psi(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{x} \tag{19.25}$$

の形に書ける．ここで自然座標 $\boldsymbol{\theta} = \nabla\phi(\boldsymbol{\eta})$ と ϕ と双対なポテンシャル $\psi(\boldsymbol{\theta})$ を用いた．C_h の自然座標 $\boldsymbol{\theta}_h$ は，クラスタ中心 $\boldsymbol{\eta}_h$ に対応し，それを Legendre 変換したものであり，$\boldsymbol{x}$ の測度が $d\mu\langle\boldsymbol{x}\rangle = \exp\{-\phi(\boldsymbol{x})\}d\boldsymbol{x}$ である．

Bayes の立場を取り，カテゴリ C_h の事前確率を π_h としよう．このとき，信号 $\boldsymbol{x}$ の出現する確率は

$$p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) = \sum_h \pi_h \exp\{\boldsymbol{\theta}_h \cdot \boldsymbol{x} - \psi(\boldsymbol{\theta}_h)\} \tag{19.26}$$

のように，指数型分布族の混合分布で表せる．この分布を決めるパラメタ $\boldsymbol{\xi}$ は，事前分布 $\{\pi_h\}$ および m 個のクラスタ中心 $\boldsymbol{\theta}_h$（またはその双対座標 $\boldsymbol{\eta}_h, h = 1, \cdots, m$）からなる．

信号の集合 $S = \{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N\}$ が与えられたときに，これが m 個のクラスタからなる分布 (19.26) から発生したものと考えて，これを発生するクラスタ $C_1, \cdots, C_m$ の中心 $\boldsymbol{\theta}_1, \cdots, \boldsymbol{\theta}_m$ と，カテゴリの事前分布 $\pi_1, \cdots, \pi_m$ を求めたい．データ S だけが与えられ，各 $\boldsymbol{x}_i$ がどのカテゴリであるかはわからないときは，これは教師信号なしの学習問題と考えてよいが，統計学の見地からすれば，観測データ S から確率分布 (19.26) のパラメータを推定する問題である．このとき，最尤推定

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \arg\max \sum_{i=1}^{N} \log p(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\xi}) \tag{19.27}$$

は，ダイバージェンス $D_\phi[\boldsymbol{x}_i : \boldsymbol{\eta}_h]$ の条件付分布による平均

$$\sum_{i,h} D_\phi[\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\eta}_h]\, p(C_h | \boldsymbol{x}_i) \tag{19.28}$$

を最小にする解に対応する．ここで $p[C_h | \boldsymbol{x}_i]$ は $\boldsymbol{x}_i$ がどのカテゴリに属するか，その事後確率であり，以下で定まる．

各カテゴリの確率分布が定まれば，信号 $\boldsymbol{x}$ がどのカテゴリに属するか，そのソフト分類ができる．ソフト分類とは，$\boldsymbol{x}$ が各カテゴリに属すると見る確率を与えることである．これは，Bayes の定理を用いて，$\boldsymbol{x}$ が C_h に属する事後確率

$$p(C_h | \boldsymbol{x}) = \frac{\pi_h p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_h)}{\sum \pi_h p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}_h)} \tag{19.29}$$

を計算すれば良い．こうして，$\boldsymbol{x}$ に対してそれがクラスタ C_h に属する確率が求まる．データ S をもとに，各カテゴリの確率分布を与えることをソフトクラスタリングと呼ぶ．

ソフトクラスタリングのアルゴリズム

1. 初期段階：事前分布 π_h と各クラスタ C_h の中心のアファイン座標 $\boldsymbol{\theta}_h$ を互いに異なるように定める（例えばランダムで良い）．

2. クラスタ形成段階：現在のパラメータから，各 $\boldsymbol{x}_i$ について，それが C_h に属する事後確率 $p(C_h | \boldsymbol{x}_i)$ を計算する．

3. パラメータの更新段階：事後確率を用いて，事前確率を

$$\pi_h = \frac{1}{N} \sum_i p\left(C_h \,|\, \boldsymbol{x}_i\right) \tag{19.30}$$

で定め，また各クラスタ C_h の中心を，対数尤度が最大になるように，すなわちダイバージェンスの期待値

$$\boldsymbol{\eta}_h = \arg\min_{\boldsymbol{\eta}} \sum_i p\left(C_h \,|\, \boldsymbol{x}_i\right) D_\phi \left[\boldsymbol{x}_i : \boldsymbol{\eta}\right] \tag{19.31}$$

が最小になるように定める．

4. 終了段階：上記の手続きが収束した段階で終了する．

データが逐次与えられる場合には，オンライン学習版が同様に作れる．

上記のアルゴリズムは，隠れ変数を含む場合の EM アルゴリズムになっている（EM アルゴリズムの情報幾何は別の回で述べる）．この場合，$\boldsymbol{x}_i$ がどのクラスタから発生したかが観測されない隠れ変数である．3. の最大化のプロセスは通常厄介であるが，今の場合は双対座標 $\boldsymbol{\eta}$ を用いれば，簡単にできる．すなわちカテゴリ C_h の中心 $\boldsymbol{\eta}_h$ は，条件付き確率 $p\left(\boldsymbol{x} \,|\, C_h\right)$ を用いて

$$\boldsymbol{\eta}_h = \sum \boldsymbol{x}_i p\left(\boldsymbol{x}_i \,|\, C_h\right) \tag{19.32}$$

で与えられる．

パターン分類やボロノイ図も同様にできる．2 つのカテゴリ C_i と C_j を考えると，このとき信号 $\boldsymbol{x}$ がどちらのカテゴリに属するかは，事後確率分布 $p\left(C_i|\boldsymbol{x}\right)$, $p\left(C_j|\boldsymbol{x}\right)$ で与えられる．つまりソフト分類である．これをハード分類にしてどのカテゴリかを決めるとすれば，事後確率 $p\left(C_h \,|\, \boldsymbol{x}\right)$ が最大なカテゴリを選ぶのが，決定誤差を最小にする．このとき，2 つのカテゴリ C_i と C_j の境界面は

$$p\left(C_i|\boldsymbol{x}\right) = p\left(C_j|\boldsymbol{x}\right) \tag{19.33}$$

で決まる．

定理 19.5　ソフトクラスタリングで，2 つのカテゴリのハード境界は，クラスタ中心を結ぶ双対測地線に直交する平坦超平面で与えられ，その面が測地線を切る $\boldsymbol{\eta}_{ij}$ 点は，$\boldsymbol{\eta}_i$ と $\boldsymbol{\eta}_j$ とを結ぶ双対測地線上で

$$\pi_i D_\phi \left[\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{\eta}_i\right] = \pi_j D_\phi \left[\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{\eta}_j\right] \tag{19.34}$$

である．

これを用いて，ソフトクラスタリングの場合も，ボロノイ図の分解ができる．これは確定的でありハードな分類である．

19.6 トータル Bregman ダイバージェンス

分類，認識，検索などにダイバージェンスを用いることは自然であるが，どのダイバージェンスを使うとよいかは，それぞれの信号の性格によってまちまちであろう．ここでは，与えられたダイバージェンスを少し変形して，新しいダイバージェンスを作ることを考えよう．これがトータル Bregman ダイバー

ジェンス（以下 tBD と記す）である．

凸関数 $\phi(\boldsymbol{\eta})$ が与えられたときに，ここから 2 点 $\boldsymbol{\eta}$ と $\boldsymbol{\eta}'$ の間の Bregman ダイバージェンスが (19.1) で作れた．これは，図で書けば，凸関数 ϕ に対して $\boldsymbol{\eta}'$ 点で接線（一般の次元では接超平面）を引き，$\boldsymbol{\eta}$ 点において凸関数 $\phi(\boldsymbol{\eta})$ と接線（接超平面）の高さがどのくらいずれるか，そのずれを計ったものである（図 19.3）．すなわち，ϕ とその線形近似の高さの差で測る．高さの代わりに $(\boldsymbol{\eta}, \phi(\boldsymbol{\eta}))$ 点から，接線（接超平面）へ垂線を引き，その長さで計ってみよう（図 19.3）．これは常に正であり，しかも縦軸を含めた座標軸全体を回転しても長さが変わらない．

線形回帰の問題で，回帰直線への高さのずれの二乗を最小にする通常の最小二乗でなく，回帰直線への垂直のずれを最小化するものをトータル最小二乗法と呼ぶ．これにあやかって，B. Vemuri らはこれをトータル Bregman ダイバージェンス（tBD）と呼んだ[3]．いま，関数 $\phi(\boldsymbol{\eta})$ のスケールは自由に選べると考え，定数 c を用いて凸関数 $c\phi(\boldsymbol{\eta})$ を用いる．このとき，tBD，すなわち接線への垂直の長さは，簡単な計算によって

$$tD\left[\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}'\right] = \frac{\phi(\boldsymbol{\eta}) - \phi\left(\boldsymbol{\eta}'\right) - \nabla\phi\left(\boldsymbol{\eta}'\right) \cdot \left(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}'\right)}{w\left(\boldsymbol{\eta}'\right)}, \tag{19.35}$$

$$w\left(\boldsymbol{\eta}'\right) = \sqrt{1 + c^2 \|\nabla\phi\left(\boldsymbol{\eta}'\right)\|^2} \tag{19.36}$$

となることがわかる．したがって，凸関数 ϕ からスケール c を用いて定義される tBD は，

$$tD_{c\phi}\left[\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}'\right] = \frac{1}{w\left(\boldsymbol{\eta}'\right)} D_\phi\left[\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}'\right] \tag{19.37}$$

である．これは前々回に述べた，ダイバージェンスの共形変換である．スケール c を小さくすれば，これは元のダイバージェンスに近づき，$c = 0$ で元のものに一致するから，c を導入した効果を考えながら都合のよい c を選ぶことにする．

tBD の長所の一つに頑健性がある．集合 $S = \{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N\}$ の中心を考えよう．tBD による中心は，

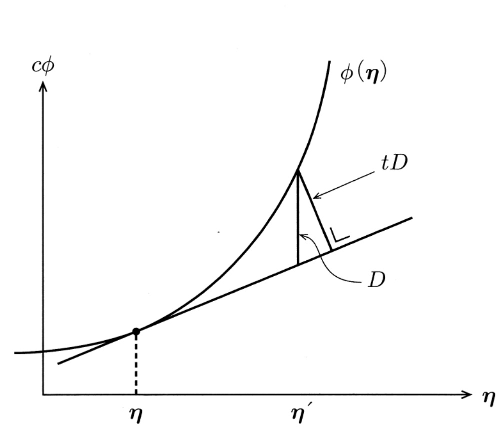


図 19.3　Bregman ダイバージェンス D とトータル Bregman ダイバージェンス tD.

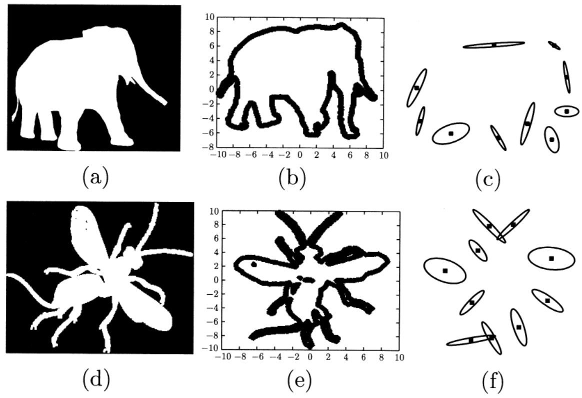


図 19.4　画像（左）の輪郭を抽出し（中），これを多数のガウス分布で近似（右）[4]．

$$w_i = \sqrt{1 + c\nabla\phi\left(\boldsymbol{x}_i\right)} \tag{19.38}$$

として，

$$\boldsymbol{\eta}_{tS} = \frac{1}{\sum w_i}\sum w_i \boldsymbol{x}_i \tag{19.39}$$

で求まる．ここで，集合 S に，新しくとてつもなく大きいデータ $\boldsymbol{x}$ が一つ混入したときの影響を影響曲線で調べよう．このとき，S は $S' = \{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}\}$ になり，中心は変化するから，その変化分を $\delta\boldsymbol{\eta}$ と書こう．信号の数 N は十分大きいものとする．とてつもなく大きな $\boldsymbol{x}$（これを外れ値，アウトライアーと呼ぶ）が一つ混入しても，中心の変化 $\delta\boldsymbol{\eta}$ が有限で抑えられるとすれば，中心は $\boldsymbol{x}$ の混入に関して頑健であるといえる．見やすくするため，S の中心 $\boldsymbol{\eta}_{tS}$ を $\boldsymbol{x}^*$ と置く．

$$\delta\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{N}\boldsymbol{z}\left(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}\right) \tag{19.40}$$

と書けば，$\boldsymbol{z}\left(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}\right)$ は影響関数である．

定理 19.6　tBD は頑健である．

証明　$\boldsymbol{x}$ が混入したとき，新しい中心 $\bar{\boldsymbol{x}}^*$ は

$$\frac{1}{N+1}\sum \frac{D_\phi\left(\bar{\boldsymbol{x}}^* : \boldsymbol{x}_i\right)}{w_i} + \frac{1}{N+1}\frac{D_\phi\left[\bar{\boldsymbol{x}}^* : \boldsymbol{x}\right]}{w\boldsymbol{x}} \tag{19.41}$$

を最小化する．N が大きいとして，$\bar{\boldsymbol{x}}^* = \boldsymbol{x}^* + \delta\boldsymbol{\eta}$ をテイラー展開すれば

$$\boldsymbol{z}\left(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}\right) = \frac{1}{w(\boldsymbol{x})}G^{-1}\left\{\nabla\phi(\boldsymbol{x}) - \nabla\phi\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right\}, \tag{19.42}$$

$$G = \frac{1}{N}\sum \frac{1}{w_i}\nabla\nabla\phi\left(\boldsymbol{x}^*\right) \tag{19.43}$$

となる．しかるに $\nabla\phi(\boldsymbol{x})/w(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ をいくら大きくしても有界である．従って，$\boldsymbol{z}\left(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}\right)$ は有界である．

Vemuri らは，tBD を用いて MRI 画像の解析を行い，良好な結果を得ている[3]．同じく Liu ら[4]は，画像の検索に用いている．これを簡単に説明しよう．図 19.4 に示すような画像が多数与えられたとしよう．ここでは画像の輪郭を抽出し，輪郭の部分部分をガウス分布で近似する．すると，一つの画像はガウス

分布の和で表せる．

いま，平均 $\boldsymbol{\mu}$，共分散行列 V のガウス分布を

$$p(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, V) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|V|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})' V^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\} \tag{19.44}$$

のように書き，画像を

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum a_i p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}_i, V_i) \tag{19.45}$$

で表現する．2 つの画像（ガウス分布）$p_1(\boldsymbol{x})$ と $p_2(\boldsymbol{x})$ のダイバージェンスを，ここではユークリッド距離を用いて

$$D[p_1(\boldsymbol{x}) : p_2(\boldsymbol{x})] = \int \{p_1(\boldsymbol{x}) - p_2(\boldsymbol{x})\}^2 d\boldsymbol{x} \tag{19.46}$$

で定める．しかし，ここから tBD を導くと，それは

$$tD[p_1(\boldsymbol{x}) : p_2(\boldsymbol{x})] = \frac{\int |p_1(\boldsymbol{x}) - p_2(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x}}{\sqrt{1 + 4\int |p_2(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x}}} \tag{19.47}$$

のようになる．

これを用いて，クラスタを構成し，検索を行う．これにはいくつかの有名な画像データベースを用いている．現在あるいろいろな手法と比べ，この手法はほぼ最高の結果を示すだけでなく，計算にかかる時間が非常に少ないと結論している．

tBD は，もとのダイバージェンスを (19.37) によって変換する．これは点 $\boldsymbol{\eta}'$ に応じてダイバージェンスを拡大縮小するものだから，共形変換をもたらす．tBD は共形幾何の良い応用例でもある．

終わりの一言

画像情報を分類して整理し，またすばやく検索する技術は，インターネット技術として重要で，多くの手法が実用化されている．これも機械学習の中心問題の一つといってよい．

情報幾何の立場で眺めると，多くの手法がすっきりと理解できる上に，ユークリッドの世界を広げて双対平坦空間への拡張できる．ボロノイ図など，計算幾何学での手法も一般化されている．

参考文献

1) A. Banerjee, S. Merugu, I.S. Dhillon and J. Ghosh, Clustering with Bregman divergences, *J. Machine Learning Research*, **6**, 1705–1749, 2005.
2) J.-D. Boissonnat, F. Nielsen and R. Nock, Bregman voronoi diagrams, *Discrete and Computational Geometry*, **44**, 281–307, 2010.
3) B.C. Vemuri, M. Liu, S. Amari and F. Nielsen, Total Bregman divergence and its applications to DTI analysis, *IEEE Trans. on Medical Imaging*, **30**, 475–483, 2010.
4) M. Liu, B.C. Vemuri, S. Amari and F. Nielsen, Shape retrieval using hierarchical total Bregman soft clustering, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2012.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

数理モデルの座標

鈴木 貴

1.『原論』とプラトン

数理科学の展開において，大阪は歴史的な役割を果たしてきた．大阪大学の源流や成立過程も大阪という地と深く関わっている．司馬遼太郎が見立てたように緒方洪庵は校祖であり，適塾に学んだ人物群は学生，卒業生の先輩である．その一人である，福沢諭吉が後年の自伝で西洋と東洋を論じ，東洋文明に不足しているものは「自立心」と「数理的思考」の2つのみであると言い切っていることにも心惹かれる．

基礎工学研究科は，純粋数学の研究者であった正田建次郎の意思と尽力により，半世紀前に設立された．何回かの改組を経て，内部組織はやや複雑である．「研究室」が研究グループの最小単位であることは変わりない．その上の階層として，日常的な機能はあまりないが講座というものが残っている．筆者は「数理モデル」という名前の講座に所属し，着任から今年の3月でちょうど10年が過ぎた．

筆者が数学科の学生であった40年前には「モデル」はもちろん，「数理」という言葉も遠いものであった．近くで耳にするようになっても違和感をぬぐえなかった．それでも「数理」のほうは，今の職場に来てからは時には進んで使うこともあったようである．

15年くらい前に熱方程式の特異集合を考えていたことがある．空間 x と時間 t に依存し，温度を表す関数を $u=u(x,t)$ とする．この $u(x,t)$ は $+\infty$ も値として許すような連続関数であり，「特異集合」$D(t)=\{x \mid u(x,t)=+\infty\}$ は有界な領域の内部に閉じ込められている．さらにある時間の間，特異集合の外で熱方程式の優解 $u_t-\Delta u \geq 0$ になっていたとする．理由はわからないが，それまでこのような定式化はなかった．しかし定理によればこのとき，$D(t)$ は時空で「やせた」集合になる．例えば空間については定義された領域から2次元以上下がったものでなければならない．逆に言うと，やせていない場合には特異集合はどんなに大きな有界領域にも閉じ込められずたちまちその境界に達し，その状況はスケール不変な不等式で記述することができる．証明のアイデアは単純であるが，長い間思いうかばなかった現象であった．

特異集合の出現という，現実にはあり得ない極限状態の下で成り立つ定理として，このとき数理モデルである「熱方程式」は熱という現象の一端を垣間見せた．それは最初からそこにあったもので，「新しかった」わけでも「役に立った」わけでもないが，数学と現実との確かなつながりを意識

せざるを得なかった.

古代ギリシャで確立した「数学」が他の文明のそれとは似て非なるものであり，今日の自然科学の基盤となっていることは多くの碩学が論じている．筆者はその核心がプラトンのイデア論で展開されたものにあるという意見に賛意を表する．例えば『原論』が「点は位置があって大きさのないものである」と書き始めたとき，その「点」はイデアとして意識されたものであり，『原論』全体の意図がイデアの構築，もしくは描写であった．今，「イデア」は「モデル」と同じものだと言えば，多くの人の賛同は得られないかも知れないが，あえて両者は対象に向かうときの温度差に過ぎないような気がすると述べておく．実際，『原論』は壮大な「モデル」であり，異なるモデルは確かに存在していた．同時に原モデルが変容する鍵となる平行線の公理も，間違いなく記載されていた．

アリストテレスの世界像は『原論』の対極にある．この体系はその芯が何であるか不明なまま，現実をかくあるごとくと説明し，納得させてしまうところに真骨頂があった．イデアとして提示されたものは自律的に変容しそれはモデルと読み替えられる．一方アリストテレスの哲学は現実と交渉することで壊れていく．学問体系のあり様がこの2つのタイプに尽きるわけではないが，両者には，筆者がトップダウンモデリング，ボトムアップモデリングと呼んでいる要素が瞥見される．

以上の省察は，数学のみならず生命や宇宙など，現代の先端科学を考えていくときに示唆を与えるものである．消息を伝えるものとしてバーナードショウがアインシュタインのノーベル賞受賞祝賀パーティで述べた短いスピーチを挙げておく：「アリストテレスの宇宙は千年続いた．ニュートンの宇宙は四百年続いた．アインシュタインの宇宙が何年続くか，私は知らない」

2. ニュートンが分かっていたこと

「座標」はモデルの次に論ずべきものである．この観点から見ても，ニュートンはデカルトからライプニッツを経て，オイラー，ラプラスに向かう流れとは異質のところにいる．座標の威力は十分に分かっている．その操作に習熟し，深い結果を白日の下に提示する．しかしその記述はともすれば座標から離れていく．それが『プリンキピア』である．

イデアの衣をまとっているにせよモデルはモデルであり，座標はこのモデルに対面するためのさらに便宜的な衣装に過ぎない．従ってモデルや座標を使う真価は，事態を正しく捕捉し縦横無尽に議論を展開することができるかどうかにかかっているのであって，それ自身の中に本質が存在するのではない．この手触りは，誰もが分かっているようでいて徹し切れた例は少ない．解析力学の衝撃はそこにあり，ラグランジュは150年後に出現したニュートンの後継者であった．

ラグランジュが，その力学を「一般座標」で記述し始めるとき，現代の学徒はそれが後のガウスやリーマンが定式化した「計量」とは肌合いが違うことに気付く．その違和感は座標が時間とともに動くことに由来する．狭義の「ラグランジュ座標」も，速度場が生成する流れに乗った粒子とともに設定された一般座標の一つの形態である．計量が一般座標と融合するのは，ポアンカレを経由し，漸くアインシュタインにたどり着く頃である．

ここではニュートンが提出した2つの重要な観点を指摘しておきたい．一つはケプラーの第2法則の証明で使われる外積 $x \times y,\, x, y \in \mathbf{R}^3$ である．この座標は確かに，右左の系で逆の表現を持っていた．同一対象の鏡像的表現であるという，この「外積」のあり方が反対称性 $y \times x = -x \times y$ という性質に反映され，中心力 $f = f(r)\omega \in \mathbf{R}^3$, $r = |x|,\, x = r\omega \in \mathbf{R}^3$ の下で，角運動量の時間微分の消滅 $\frac{d}{dt}(x \times \dot{x}) = 0$ という状況を引き起こす起源になるのである．

角運動量の時間微分が消滅する原理は，さらに微分と行列式という言葉で表現することもできる．この表現を通すことで，モデル解析の重要な数学ツールである，高階常微分方程式のロンスキアン，速度場が生成する流れの下での積分量の変換，すなわちリュービルの定理，可積分系のタウ関数，最

近の発散・回転補題が一連のものとして出現してくる．

広く現代数学において，反対称性はいくつかのテンソルが消滅する機構の基盤であり，ホモロジー代数，微分形式，ホッジ理論，ゲージ理論で不可避の役割を果たす．ポアンカレ予想を最終的に解決したリッチフローを含め，拡散幾何では計量の時間発展が，物体の変化を記述する座標である．そこで用いられる偏微分方程式系において，テンソルの反対称性がエントロピーの減少をはじめとする大域的性質を導出することが広く実証されている．その他にも反対称性テンソルの解消が本質的な役割を果たした例は多い．筆者は，理論生物学における生態系動力学モデルのいくつかが，種間の相互作用を隠された反対称テンソルによって記述するものであって，そのことが種間の「動的平衡」を導き出す源になっていることに注目している．

ここで指摘するニュートンのもう一つの観点は，反対称性とは全く逆の「対称性」である．より詳しくは運動の第 3 法則，すなわち作用反作用の法則と遠隔作用の原理との関わりである．

ニュートン力学が最初から遠隔作用の原理に基づいていたことは，繰り返し論じられてきた．実際その原理は数理的な言葉では「場」，数式としてはポテンシャルとして記述されていた．ニュートンポテンシャルはポアソン方程式の基本解になっているが，それはニュートンポテンシャルが一つの質点（粒子）が作り出す重力場であるからである．従って粒子が多数になり，連続に分布するとみなせるような場合には右辺に質量分布をおいたポアソン方程式を解かなければならない．

ポアソン方程式は境界条件を与えて初めて数学的に適切なものとなる．この数理モデルはニュートンの遠隔作用と一体であり，その導出過程は，楕円型境界値問題の解の大域的性質が遠隔作用の原理に由来するものであることを明らかにしているのである．

遠隔作用の原理と作用反作用の法則との関わりについて述べよう．実際ポアソン方程式の境界値問題の解は積分によって表示される．グリーン関数 $G(x,x')$ はこの積分核を示すものであり，x' にある粒子が x にある粒子に与える重力のポテンシャルを表している．従ってグリーン関数の対称性 $G(x',x)=G(x,x')$ は，作用反作用の法則が要請するものである．作用素の自己共役性は，グリーン関数の対称性をポアソン方程式の境界値問題に戻って無限次元解析の言葉で表したもので，連続場の階層における内部エネルギーの保存はこの自己共役性から導出される．この文脈でフォン・ノイマンは量子力学とともに自己共役性を考え，加藤敏夫は自己共役性が実現する原理を作用素論の枠組みの中で確定する．

ヘルムホルツ自由エネルギーは熱力学的に閉じた系を時空で規定する汎関数であり，内部エネルギーからボルツマンエントロピーを引いたものである．ニュートンが述べた作用反作用の法則は，自己相互作用の平均場階層において，ヘルムホルツ自由エネルギーの減少と弱形式の対称化による特異性の解消という 2 つの役割を果たしていくことになる．

3. マクスウェルとボルツマン

先人の営みを高みから見下ろし，現代の知識を振り回してもっともらしい言葉で論じることは慎まなければならない．しかし今，マクスウェルとボルツマンの対照，包括してくれたものの確かさ，その人たちのあり様の美しさを想う．

マクスウェルの生涯は静かである．そのモデルは場を論じ，近接作用である信号の伝達を保存則というニュートン世界に包摂する．ボルツマンは激しく，繊細である．粒子の運動を論じたモデルは，その人の人生のように時間とともに熱的終局に向かう．両者が扱ったカテゴリーは，数学的にも物理的にも共通項を持ち得ないものであった．

クーン・タッカー双対やトーランド双対はゲーム理論の枠組みで提出された双対性である．自然科学の変分問題とは異なり，社会科学では最大化を考えることも多い．理由はそれが考え易いからであって，数学的には等価である．数理物理モデ

ルに対する「双対変分原理」はゲーム理論で用いられたこれらの変分構造と同等であり，「粒子」が「場」を介して自己相互作用するとき，両者が双対的な関係にあることを明らかにする．

点渦乱流平均場，自己双対ゲージモデル，相平均場モデル，走化性モデル，自己重力流体モデル，記憶形状熱弾性モデルなど，様々なモデルは多数粒子が平均場を構築し，場の形成を通して自己相互作用が実現されることを記述しているが，そこでは保存量や自由エネルギーの間にトーランド（半）双対が成り立っている．もちろん「場」も「粒子」も表象的なものであり，時に応じて流れ関数と渦度，粒子密度と化学物質濃度，温度と秩序パラメータといったものがあてがわれる．数式の上ではあるが，マクスウェルとボルツマンが考えた場と粒子密度が，ここでは互いに補完的な関係に設置されるのである．

無限次元解析の枠組みの中で，双対性はどのように考えられているのであろうか．まず，ニュートン世界は 2 次形式が支配している．対称行列は 2 次形式と等価であり，自己共役性は量子力学の枠組みとともに複素係数で成り立つ対称性である．線形代数における準同型定理は核と値域の双対性に由来し，それは転置行列を用いて記述されていた．

社会科学における最適化問題は制約条件を伴っている．典型的な例ではそれらは線形連立不等式で表される．売り手と買い手は双対的であり，それぞれの立場から記述される制約付き変分問題は経済学的に等価でなければならない．線形計画法で基本的なこのクーン・タッカーの理論は，凸解析の枠組みで定式化することができる．そこでは売り手と買い手はラグランジュ汎関数に統合され，その変分問題では鞍点が目指す到達点となる．これに対し，トーランド双対では 2 つの凸汎関数の差を臨界にする問題と，同型なその双対問題が導出される．クーン・タッカー双対と同じように，2 つの最適化問題は同等になり，さらにラグランジュ汎関数によって一つの変分問題に統合される．

クーン・タッカー，トーランド，いずれの理論も双対的な問題を導出する核は適正，下半連続な凸汎関数のルジャンドル変換に関するフェンシェル・モローの定理にある．この変換は数理物理学に由来する．一つは解析力学のラグランジュアンとハミルトニアンの関係であり，もう一つが熱的平衡からの自由エネルギーの導出である．秩序パラメータを用いた相平均場モデルにおいて，双対変分構造が実現される理由がそこにある．最後に熱力学モデルについて触れておく．

熱力学はそもそも不足決定系であり，議論を進めるためにいくつかの物理化学的な仮定が用意されている．また統計集団は粒子運動の状態を定められた保存量によって同一視した商空間を表す．孤立系はエネルギーが一定な系であり，結果として時間とともにエントロピーが増大する．エネルギーによって系の状態を分類したものが小正準集団である．同様に温度一定な系では，正準集団とヘルムホルツの自由エネルギー減少，圧力一定な系では，大正準集団とギブスの自由エネルギー減少が現れる．これらの自由エネルギーは，エントロピーを基準とし，ルジャンドル変換を通して定まる状態量で定式化される．

非平衡熱力学のモデルでは最初に統計集団が，次に自由エネルギー（エントロピー）が定められる．相転移に関するアレン・カーン，相分離に関するカーン・ヒリヤードが使ったのは秩序パラメータに関する同じランダウ・ギンツブルグの自由エネルギーである．両者の違いは自由エネルギーの減少という法則に，全状態量の保存を組み込むか否かによる．すなわち前者は「モデル A」で保存則を組み込まず，後者は「モデル B」で保存則を組み込んだものである．

スモルコフスキー・ポアソン方程式は，温度一定の下で粒子密度平均場の運動を記述する熱力学の基礎方程式である．単純化した走化性方程式がこの形になるため，ケラー・シーゲル系とも呼ばれるが，基礎構造はヘルムホルツ自由エネルギーを用いたモデル B 方程式である．オンサーガーに由来する点渦乱流平均場方程式は，この自由エネルギーのトーランド双対として導出される場の汎関数のオイラー方程式である．また走化性方程式

の一つの形態である放物型–放物型モデルは，2つの変分構造を統合するラグランジュ汎関数によって粒子（細胞密度）と場（化学物質）についてのモデル B–モデル A の連立系になっていた．

前世紀，数理モデル，とりわけ偏微分方程式の数学解析は著しい進展を見せた．そこではモデルが様々な型に分類され，互いに相容れない性質を持つことが確認されていた．その一方で，一つの観点からどれほど多数のモデルをくくることができるかといったことも吟味されていた．

双対変分原理が明らかにしたのは，非平衡熱力学，流体物理学，自己双対ゲージ理論など様々な分野において，数学的には「大多数」からはじき出され，あるいは異なる型に属するとされていたいくつかのモデルがそれぞれの情景をもち，互いにしっかりと手を携えて全体として風景を作っていく様態である．

4. 循環するハミルトニアン

定常状態とは，閉じた系の熱的終局を指す言葉である．ヘルムホルツ自由エネルギーは粒子密度で記述され，その臨界関数の満たすオイラー方程式は，保存量である全質量を係数とする非線形固有値問題として定式化される．このモデルの主要部は自己相似的な座標変換で不変であり，その解集合は空間 2 次元において「量子化する爆発機構」を持っている．

非線形楕円型理論が明らかにする定常解集合のこのあり様は，「スケーリング」を通して非定常状態に引き継がれる．この状況は非定常線形シュレディンガー方程式の解の挙動が，定常状態の全体，すなわち作用素のスペクトルに分解されることに類似しているので，「非線形スペクトル理論」と呼ぶ．

双対変分原理が組み込む「場と粒子の双対性」が，自由エネルギー，場の汎関数，ラグランジュ汎関数の枠組みで多くの数理モデルを横につないだのに対し，「非線形スペクトル理論」が指し示すのは，時間発展が定常状態の全体集合によって制御される，近平衡のパラダイムである．

標題の「循環的階層」とは，粒子密度の平均場近似においてパラメータが臨界状態に近づくと平均場が再び粒子に凝縮し，その凝縮の過程が最初に粒子の運動を支配したハミルトニアンに制御されることを示す．こうしてキルヒホッフとオンサーガーに由来する 2 つの数理モデル，すなわち渦度場方程式と点渦乱流平均場方程式は，平均場階層を超えて結びついていた．登場したハミルトニアンは，空間次元や非線形性を越えて半線形楕円型方程式の解構造を解明する核となり，その効果は非線形スペクトル力学を介して近平衡動力学に及ぶであろう．

「循環的階層」を認識するまでに筆者は 20 年近くを費やした．研究は今も進展中であるが，研究室のホームページにはいくつかの講演記録が残されている．http://www.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/suzuki/index.html

参考文献

1) K. Nagasaki and T. Suzuki, *Asymptotic Analysis* **3** (1990) 173–188.
2) S. Sakaguchi and T. Suzuki, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **142** (1998) 143–153.
3) T. Suzuki and F. Takahashi, *Math. Z.* **259** (2008) 141–168.
4) T. Suzuki, *Free Energy and Self-Interacting Particles*, Birkhäuser, Boston, 2005.
5) T. Suzuki, *Mean Field Theories and Dual Variation*, Atlantis Press, Amsterdam-Paris, 2008.
6) T. Suzuki and T. Senba, *Applied Analysis*, Imperial College Press, London, 2011.

（すずき・たかし，大阪大学大学院基礎工学研究科）

2012年 (1月号~12月号) 総 目 次

Vol. 50, No. 583～Vol. 50, No. 594

■特　集　2012年 1月号　数学から物理へ，物理から数学へ　分野を越えた新時代の数理科学
2月号　古典のススメ[物理編]　新しい発想のヒントを探る
3月号　量子を操る　拡がりゆく量子の不思議な姿
4月号　量子力学の数学的技法　数学の発想で量子力学へ挑む
5月号　解析学と物理学　響き合う数学的方法と物理的思考
6月号　面白い発想[物理編]　物理的思考のためのヒントを探る
7月号　数学と物理における格子　整然とした形でとらえる数理現象
8月号　導来圏をめぐって　数学と物理の新たな世界に迫る
9月号　ハイゼンベルク　対話と討論が生み出した現代物理の礎
10月号　超弦理論の数理　最先端の数学が拓く新たな自然像
11月号　物理と数学における厳密解　自然現象の解明に向けて
12月号　〈振動する〉物理　周期的運動で自然の姿を捉える

■特　集　月号・頁

■インタビュー

■名著に親しむ

■連　載

■リレー連載

■「数理科学」は語る

■その他の論文・エッセイ

■書　評

特　集（2013年2月号予告）

《量子化》の発想

可積分系から幾何学まで

本体952円

特　集（2012年12月号）

〈振動する〉物理

周期的運動で自然の姿を捉える

本体952円

編集後記

小誌は一足先に新年を迎えました．年の始まりに相応しいかどうかはわかりませんが，様々な切り口から一つの分野へアプローチしていく，という特集を組ませていただきました．

また，数学の最重要定理の一つでもある「微積分学の基本定理」を軸にした連載も始めさせていただきました．今後も様々な問題が取り上げられ，この定理の奥深さをあらためて知ることができると思います．

今年も宜しくお願い致します．　(R)

*　　　*

今回のテーマである表現論は，一見数学の分野？ と思うような名前ですが，解析，幾何，代数などの分野が交わる位置にあり，物理学とも関係が深く重要なテーマであるようです．本特集を楽しんでいただければ幸いです．

さて，小誌は本号で新しい年を迎えました．昨年は科学の分野を盛り上げるニュースが多くありましたが，本年も科学の発展に寄与するような話題がたくさん出てきて欲しいと思います．　(T)

数　理　科　学　1月号

2013年1月1日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 ⓒ 株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁